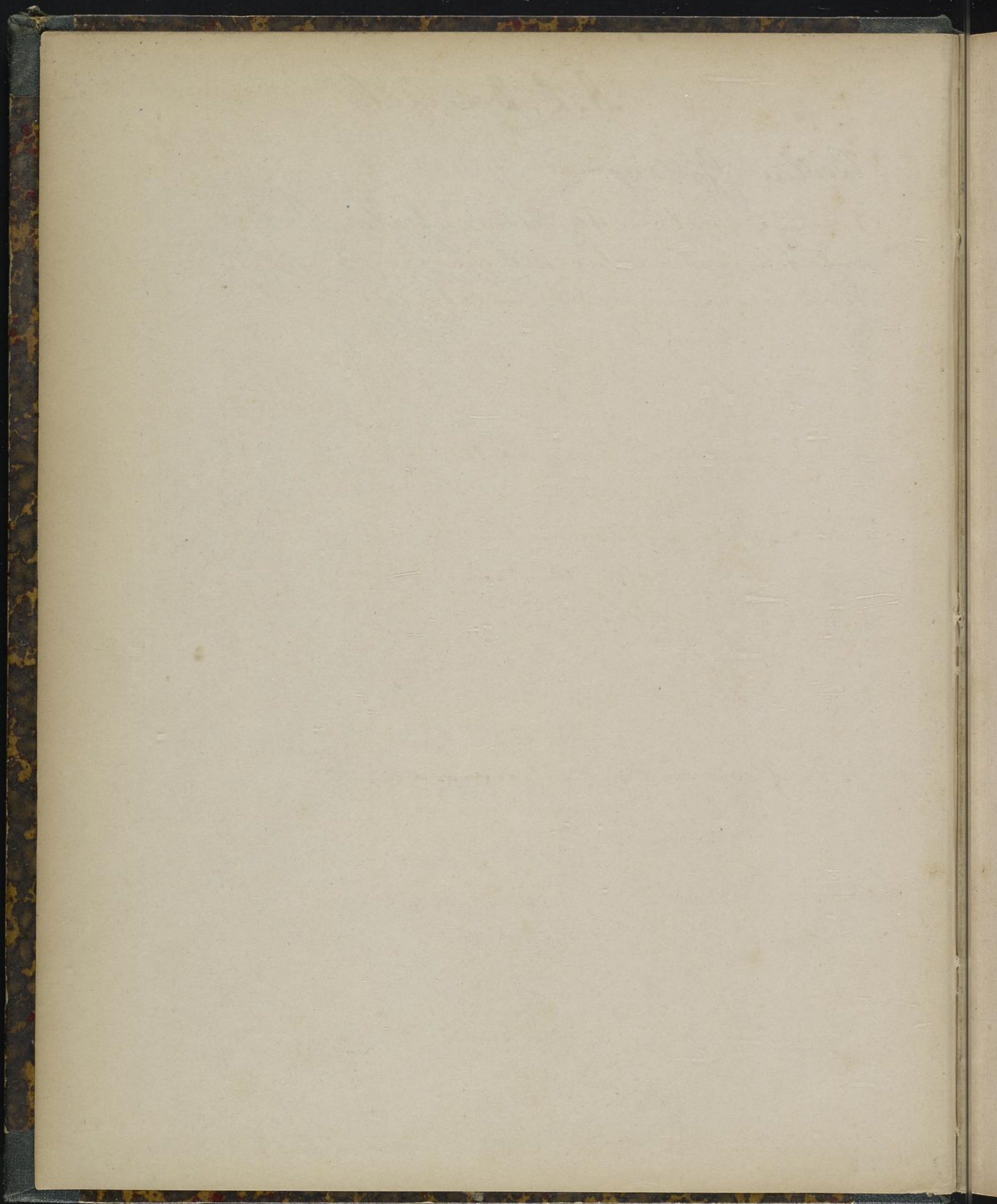
A. L. Daniels.

Berlin – Göttingen 1879 - 1883

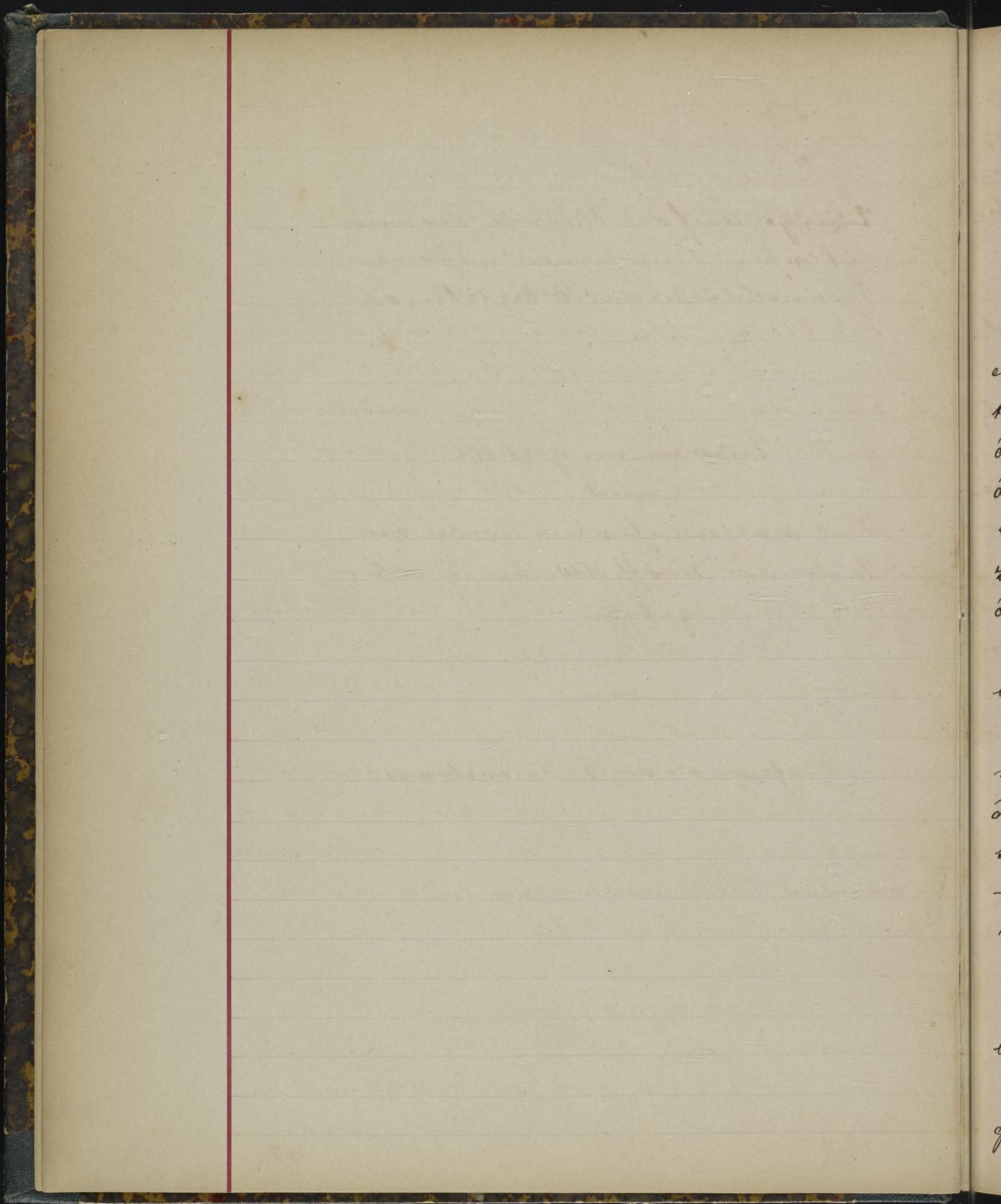
49 Mansfield Ave

Burlington Vt

1910.

Einige auf die Theorie der analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze.

Zusammengestellt
und
dem mathematischen Verein zu Berlin zur Veröffentlichung übergeben

von

Professor Dr. C. Weierstrass.

Einige auf die Theorie der analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen sich beziehenden Sätze.

1. Vorbereitungsatz.

Ist $F(x, x_1, \dots x_n)$ eine gegebene, in der Form einer gewöhnlichen Potenzreihe dargestellte Function von $x, x_1, \dots x_n$, welche, wenn diese Veränderlichen sämtlich verschwinden, ebenfalls gleich Null wird, so giebt es stets unendlich viele, dem Convergenzbezirk der Reihe angehörige Werthsysteme der Grössen $x, x_1, \dots x_n$, welche die Gleichung

$$F(x, x_1, \dots x_n) = 0$$

befriedigen.

Bei vielen Untersuchungen handelt es sich nun darum, von diesen Werthsystemen alle diejenigen zu bestimmen, bei denen der absolute Betrag jeder einzelnen Grösse eine – beliebig klein anzunehmende – Grenze δ nicht überschreitet.

Es werde

$$F(x, 0, \dots 0) \text{ mit } F_0(x)$$

bezeichnet und

$$F(x, x_1, \dots x_n) = F_0(x) - F_1(x, x_1, \dots x_n)$$

gesetzt, so dass F_1 für jeden Werth von x gleich

Null wird, wenn $x_1 \dots x_n$ sämtlich verschwinden. Ich nehme nun zunächst an, dass $F_0(x)$ nicht für jeden Werth von x verschwinde. Dann kann man eine positive Größe ϱ so annehmen, dass $F_0(x)$ für keinen Werth von x, dessen absoluter Betrag $\gtrless 0$, aber $\leqq \varrho$ ist, verschwindet, und dass es zugleich Werthe von $x_1, x_2, \dots x_n$, die sämtlich von Null verschieden sind, giebt, für welche die Reihe $F_1(\varrho, x_1, \dots x_n)$ convergirt. Wenn dann ferner eine zweite positive Größe ϱ_0, die ebenfalls > 0 aber $< \varrho$ ist, angenommen und festgesetzt wird, dass der absolute Betrag von x zwischen ϱ_0 u. ϱ, die absoluten Beträge von $x_1 \dots x_n$ aber alle unter einer Grenze ϱ_1 liegen sollen, so kann man ϱ_1 so klein annehmen, dass für alle diesen Bedingungen entsprechenden Werthsysteme von $x, x_1, \dots x_n$:

F_0 dem absoluten Betrage nach größer als F_1 ist. Man hat daher:

$$\frac{1}{F(x, x_1, \dots x_n)} = \frac{1}{F_0} + \frac{F_1}{F_0^2} + \frac{F_1^2}{F_0^3} + \dots = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{F_1^\lambda}{F_0^{\lambda+1}}$$

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{F} = \frac{\frac{\partial F_0}{\partial x}}{F_0} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{F_1^\lambda \frac{\partial F_0}{\partial x}}{F_0^{\lambda+1}} - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{F_1^{\lambda-1} \frac{\partial F_1}{\partial x}}{F_0^\lambda}$$

$$= \frac{\frac{\partial F_0}{\partial x}}{F_0} - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{F_1^\lambda}{F_0^\lambda} \right)$$

Es ist aber, da der größte Werth, welchen der absolute Betrag von $\frac{F_1}{F_0}$ für alle jetzt betrachteten Werthe von $x, x_1 \dots x_n$ besitzt, kleiner als 1 ist, die Reihe:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda} \frac{F_1^\lambda}{F_0^\lambda}$$

gleichmäßig convergent, und daher:

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{F} = \frac{\frac{\partial F_0}{\partial x}}{F_0} - \frac{\partial}{\partial x} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda} \frac{F_1^\lambda}{F_0^\lambda}$$

Es kann ferner, wenn das Anfangsglied in der Entwicklung von $F_0(x)$ den Exponenten m hat, $\frac{F_1^\lambda}{F_0^\lambda}$ in eine Reihe von der Form:

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} G(x_1 \dots x_n)_{\lambda\mu}\, x^{-m\lambda+\mu}$$

entwickelt werden, wo $G(x_1 \dots x_n)_{\lambda,\mu}$ eine gewöhnliche Potenzreihe von $x_1 \dots x_n$ bedeutet; und bei der eben erwähnten Eigenschaft der Reihe $\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda} \frac{F_1^\lambda}{F_0^\lambda}$ kann man alle Glieder, welche dieselbe Potenz von x enthalten, in eins zusammenziehen und erhält so:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda} \frac{F_1^\lambda}{F_0^\lambda} = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} G(x_1 \dots x_n)_\nu\, x^\nu$$

wo auch $G(x_1 \dots x_n)$ eine gewöhnliche Potenzreihe bezeichnet. Ferner ist

$$\frac{\frac{\partial F_0}{\partial x}}{F_0} = m x^{-1} + G(x),$$

wo $G(x)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von

x bedeutet. Also:

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{F} = m x^{-1} + \mathfrak{G}(x) - \frac{\partial}{\partial x} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{G}(x_1 \ldots x_n)_\nu \cdot x^\nu$$

Aus dieser Gleichung läßt sich zunächst ersehen, dass, wenn man den Grössen $x_1, x_2 \ldots x_n$ bestimmte Werthe, die dem absoluten Betrage nach sämtlich kleiner als ϱ_1 sind, beilegt, die Gleichung

$$F(x, x_1 \ldots x_n) = 0$$

stets durch m Werthe von x, die dem absoluten Betrage nach kleiner als ϱ sind, befriedigt wird, vorausgesetzt, dass jeder so oft gezählt wird als die zugehörige Ordnungszahl anzeigt.

Dass es überhaupt innerhalb des angegebenen Bereiches Werthe von x giebt, welche $F = 0$ machen, läßt sich so zeigen: Angenommen, es werde $F(x, x_1 \ldots x_n)$ bei gegebenen Werthen von $x_1 \ldots x_n$ für keinen der in Rede stehenden Werthe von x gleich Null, so würde sich $\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{F}$ für <u>alle</u> Werthe von x, die dem absoluten Betrage nach kleiner als ϱ sind, in eine nur ganze <u>positive</u> Potenzen von x enthaltende Reihe entwickeln lassen, und diese müßte für die ihrem absoluten Betrage nach zwischen ϱ_0 u. ϱ liegenden mit der vorstehenden

übereinstimmen. Dies ist aber nicht möglich, da in der letzteren das Glied mx^{-1} vorkommt. (Da die erste Ableitung einer Potenzreihe von x niemals ein Glied mit dem Exponenten -1 enthält, so kann sich das angegebene Glied nicht gegen ein anderes heben.) – Angenommen nun, es seien:

$$x', x'', \ldots x^{(r)}$$

die in dem angegebenen Bereiche liegenden Werthe von x, welche die Gleichung $F(x, x_1, \ldots x_n) = 0$ befriedigen, wobei ein jeder in diese Reihe so oft aufzunehmen ist, als seine Ordnungszahl anzeigt, so wird die Differenz

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{F} - \frac{1}{x - x'} - \cdots - \frac{1}{x - x^{(r)}}$$

für keinen Werth von x, dessen absoluter Betrag kleiner als ϱ ist, unendlich gross, u. kann daher in eine nur ganze positive Potenzen von x enthaltende Reihe $\mathfrak{P}(x)$ entwickelt werden. Für alle Werthe von x, die dem absoluten Betrage nach kleiner als ϱ, aber grösser als jede der Grössen $x', x'' \ldots x^{(r)}$ und ϱ_0 sind, hat man also:

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{F} = \mathfrak{P}(x) + \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} s_\nu x^{-\nu-1}$$

wo

$$S_\nu = (x')^\nu + \dots + (x^{(r)})^\nu ,$$

und
$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{F} = m x^{-1} + G(x) - \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} G(x_1 \dots x_n)_\nu \cdot \nu x^{\nu-1}$$

Die Vergleichung dieser beiden Ausdrükke von $\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{F}$ giebt

$$S_0 = m \quad \text{oder} \quad r = m$$

d. h. die Anzahl der in Rede stehenden, die Gleichung $F(x, x_1 \dots x_n) = 0$ befriedigenden Werthe von x ist gleich dem Grade des Anfangsgliedes von $F(x, 0 \dots 0)$.

Ferner ergiebt sich, wenn man

$$\nu = -l \quad \text{und} \quad l > 0 \quad \text{annimmt}$$

$$S_l = l\, G(x_1 \dots x_n)_{-l}$$

Setzt man daher:

$$f(x, x_1 \dots x_n) = (x - x') \dots (x - x^{(m)}) = x^m + f_1 x^{m-1} + \dots + f_m$$

so daß

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f} = \frac{1}{x - x'} + \dots + \frac{1}{x - x^{(m)}} ,$$

so erhält man für Werthe von x, die dem absoluten Betrage nach größer sind als $x' \dots x^{(m)}$,

$$\frac{m x^{m-1} + (m-1) f_1 x^{m-2} + \dots + f_{m-1}}{x^m + f_1 x^{m-1} + \dots + f_m} = m x^{-1} + S_1 x^{-2} + S_2 x^{-3} + \dots$$

und hieraus:

$$f_1 = - S_1$$
$$2 f_2 = - S_2 - S_1 f_1$$
$$3 f_3 = - S_3 - S_2 f_1 - S_1 f_2$$
$$\dots\dots\dots$$
$$m f_m = - S_m - S_{m-1} f_1 - S_{m-2} f_2 - \dots - S_1 f_{m-1}$$

Hiernach sind $f_1 \dots f_m$ sämtlich Potenzreihen von $x_1 \dots x_n$, welche sicher convergiren, wenn alle diese Grössen dem absoluten Betrage nach kleiner als ϱ_1 sind. Die gesuchten m Werthe von x werden dann gefunden durch Auflösung der Gleichung

$$x^m + f_1 x^{m-1} + \dots + f_m = 0$$

Man erhält ferner durch Vergleichung der beiden Ausdrücke von $\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{F}$

$$\mathfrak{P}(x) = G(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu+1)\, G(x_1, \dots x_n)_{\nu+1}\, x^{\nu}$$

für alle Werthe von x, die dem absoluten Betrage nach kleiner als ϱ sind.

Setzt man daher

$$\mathfrak{G}(x, x_1, \dots x_n) = \int_0 G(x)\,dx - \sum_{\nu=0}^{\infty} G(x_1, \dots x_n)_{\nu+1}\, x^{\nu+1}$$

$$F(x, x_1, \dots x_n) = e^{\mathfrak{G}(x, x_1, \dots x_n)}$$

so sind $\mathfrak{G}$ u. F gewöhnliche Potenzreihen von $x, x_1, \dots x_n$, welche sicher convergiren, sobald der absolute Betrag von x kleiner als ϱ, der von $x_1 \dots x_n$ kleiner als ϱ_1 ist. Dabei wird $F = 1$, wenn $x, x_1, \dots x_n$ sämtlich verschwinden.

Aus der Gleichung:

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{F} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f} + \frac{\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}}{\mathfrak{F}}$$

folgt nun:

$$F(x, x_1, \dots x_n) = f(x, x_1, \dots x_n) \cdot C\, \mathfrak{F}(x, x_1, \dots x_n),$$

wo C den Coefficienten von x^m in $F(x, 00\ldots 0)$ bedeutet.

Die Coefficienten von f, F sind nun unabhängig von den gewählten Grössen ϱ, ϱ_1; die vorstehende Gleichung muss also gelten für alle Werthe von $x, x_1 \ldots x_n$, bei denen die Reihen F alle drei convergiren.

Nehmen wir also eine Grösse δ so an, dass erstens alle Werthsysteme von $x, x_1 \ldots x_n$, in denen jede dieser Grössen dem absoluten Betrage nach die Grenze δ nicht überschreitet, dem Convergenzbezirk der genannten drei Reihen angehören, u. dass zweitens $f(x, x_1 \ldots x_n)$ für keines derselben verschwindet, so werden diejenigen unter diesen Werthsystemen, welche die Gleichung $F(x, x_1 \ldots x_n) = 0$ bestimmt.

Es ist hierbei, wie bemerkt, angenommen worden, dass

$$F(x, 0 \ldots 0)$$

nicht identisch gleich Null ist. Ist dies der Fall, so hat man zur Lösung der gestellten Aufgabe folgendermaßen zu verfahren.

Man bezeichne mit $(x, x_1 \ldots x_n)_\lambda$ die Summe derjenigen Glieder von $F(x, x_1 \ldots x_n)$, welche von der λ^{ten} Dimension sind, und mit μ den kleinsten

sten Werth von λ, für welchen die Coefficienten von $(x, x_1 \dots x_n)_\lambda$ nicht sämtlich verschwinden, so dass man

$$F(x, x_1 \dots x_n) = (x, x_1 \dots x_n) + (x, x_1 \dots x_n)_{\mu+1} + \dots$$

hat. Sodann führe man an Stelle von $x, x_1, \dots x_n$ ebenso viele andere Veränderliche $y, y_1 \dots y_n$ mittelst der Gleichungen:

$$x = c_{00}\, y + c_{01}\, y_1 + \dots + c_{0n}\, y_n$$
$$x_1 = c_{10}\, y + c_{11}\, y_1 + \dots + c_{1n}\, y_n$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$x_n = c_{n0}\, y + c_{n1} + \dots + c_{nn}\, y_n,$$

ein, wo die Grössen $c_{00} \dots c_{nn}$ Constanten bezeichnen, die keiner andern Beschränkung unterworfen sind, als dass

$$\begin{vmatrix} c_{00} & \dots & c_{0n} \\ c_{10} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n0} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad (c_{00}, c_{10} \dots c_{n0})_\mu$$

von Null verschieden sein müssen. Durch diese Subtitution verwandelt sich $F(x, x_1 \dots x_n)$ in eine ähnliche Function von $y, y_1 \dots y_n$, welche mit $\bar{F}(y, y_1 \dots y_n$ bezeichnet werden möge. Dann hat man:

$$\bar{F}(y, 0 \dots 0) = (c_{00}, c_{10} \dots c_{n0})_\mu\, y^\mu + (c_{00}, c_{10} \dots c_{n0})_{\mu+1}\, y^{\mu+1} + \dots$$

Es ist also die Function $\bar{F}(y, 0 \dots 0)$ nicht identisch gleich Null und ihr Anfangsglied von der μ^{ten} Ordnung.

Man kann daher nach dem Bewiesenen $\bar{F}(y, y_1 \dots y_n)$ darstellen in der Form

$$\bar{F}(y, y_1 \dots y_n) = (y^\mu + y^{\mu-1}\mathfrak{G}_1(y_1 \dots y_n) + \dots + \mathfrak{G}_\mu(y_1 \dots y_n))\, \bar{\mathfrak{G}}(y, y_1 \dots y_n),$$

wo $\mathfrak{G}_1 \dots \mathfrak{G}_\mu$ Potenzreihen von $y_1 \dots y_n$ bezeichnen, die sämtlich gleich Null werden, wenn diese Veränderliche sämtlich verschwinden, während $\bar{\mathfrak{G}}(y, y_1 \dots y_n)$ eine Potenzreihe von $y, y_1 \dots y_n$ ist, welche einen von Null verschiedenen Werth erhält, wenn $y, y_1 \dots y_n$ sämtlich gleich Null gesetzt werden. Die letztere Reihe kann nun in eine ebenso beschaffene Potenzreihe von $x, x_1 \dots x_n$ verwandelt werden, die mit $\mathfrak{G}(x, x_1, \dots x_n)$ bezeichnet werden möge. Dann hat man

$$F(x, x_1 \dots x_n) = (y^\mu + y^{\mu-1}\mathfrak{G}_1(y_1 \dots y_n) + \dots + \mathfrak{G}_\mu(y_1 \dots y_n))\, \mathfrak{G}(x, x_1, \dots x_n)$$

Nun kann man δ so klein annehmen, dass für jedes Werthsystem der Größen $x, x_1 \dots x_n$, in welchem jede einzelne dem absoluten Betrage nach kleiner als δ ist, erstens $\mathfrak{G}(x, x_1, \dots x_n)$ einen von Null verschiedenen Werth erhält und zweitens das entsprechende Werthsystem der Größen $y_1 \dots y_n$ dem gemeinschaftlichen Convergenzbezirk der Reihen $\mathfrak{G}_1(y_1 \dots y_n), \dots \mathfrak{G}_\mu(y_1 \dots y_n)$ angehört. Hieraus ergiebt sich folgendes:

Wenn man zu jedem dem gemeinschaftlichen Convergenzbezirk der Reihen $\mathfrak{G}_1, \dots \mathfrak{G}_\mu$ angehörigen Werthsysteme $y_1 \dots y_n$ die μ der Gleichung:

$y^\mu + y^{\mu-1} G_1(y_1 \cdots y_n) + \cdots + G_\mu(y_1 \cdots y_n) = 0$
genügenden Werthe von y bestimmt, und dann zu jedem der so sich ergebenden Werthsysteme $y\, y_1 \ldots y_n$ die entsprechenden $x, x_1, \ldots x_n$ berechnet, so finden sich unter diesen alle der Gleichung $F(x, x_1, \ldots x_n) = 0$ genügenden, welche die Bedingung erfüllen, dass jede einzelne Grösse dem absoluten Betrage nach kleiner als die angegebene Grösse δ ist.

2.

Eine Potenzreihe $\mathfrak{P}_1(x_1, \ldots x_n)$ ist durch eine andere $\mathfrak{P}_0(x_1, \ldots x_n)$ theilbar, wenn sich eine dritte Reihe $\mathfrak{P}_2(x_1, \ldots x_n)$ so bestimmen lässt, dass

$$\mathfrak{P}_1(x_1, \ldots x_n) = \mathfrak{P}_0(x_1, \ldots x_n)\, \mathfrak{P}_2(x_1, \ldots x_n)$$

ist.

Hat $\mathfrak{P}_0$ an der Stelle $(x_1 = 0, \ldots x_n = 0)$ einen von Null verschiedenen Werth, so existirt stets eine die vorstehende Gleichung befriedigende Reihe $\mathfrak{P}_2$; dagegen ist dies nicht der Fall, wenn $\mathfrak{P}_0(0, \ldots 0) = 0$ ist, während $\mathfrak{P}_1(0, \ldots 0)$ einen von Null verschiedenen Werth hat. Es bleibt daher nur zu untersuchen, unter welchen Bedingungen $\mathfrak{P}_1$ durch $\mathfrak{P}_0$ theilbar ist in dem Falle, wo

$$\mathfrak{P}_0(0, \ldots 0) \quad , \quad \mathfrak{P}_1(0, \ldots 0)$$

beide gleich Null sind.

Man führe (wie in No 1) an Stelle von $x_1, \dots x_n$ n andere Veränderliche $t_1, \dots t_n$ ein, indem man

$$x_1 = g_{11} t_1 + \dots\dots + g_{1n} t_n$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_n = g_{n1} t_1 + \dots\dots + g_{nn} t_n$$

setzt und die Constanten $g_{11}, g_{12} \dots g_{nn}$ so wählt, dass erstens $x_1, \dots x_n$ von einander unabhängige Functionen der Grössen $t_1, \dots t_n$ sind, und zweitens weder $\mathfrak{P}_0(g_{11} t_1, \dots g_{n1} t_1)$ noch $\mathfrak{P}_1(g_{11} t_1, \dots g_{n1} t_1)$ für jeden Werth von t_1 verschwindet.

Wenn dann die höchsten Potenzen von t_1, durch welche diese beiden Functionen von t_1 theilbar sind, beziehlich die Exponenten μ, ν haben, so kann man, wie in No 1 gezeigt worden

$\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n)$ auf die Form $G_0(t_1, t_2, \dots t_n)\,\overline{\mathfrak{P}}_0(t_1, \dots t_n)$

$\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n)$ " " " $G_1(t_1, t_2, \dots t_n)\,\overline{\mathfrak{P}}_1(t_1, \dots t_n)$

bringen, wo

$$G_0(t_1, t_2, \dots t_n) = t_1^{\mu} + \mathring{\mathfrak{P}}_1(t_2, \dots t_n)\, t_1^{\mu-1} + \dots\dots + \mathring{\mathfrak{P}}_{\mu}(t_2, \dots t_n)$$
$$G_1(t_1, t_2, \dots t_n) = t_1^{\nu} + \dot{\mathfrak{P}}_1(t_2, \dots t_n)\, t_1^{\nu-1} + \dots + \dot{\mathfrak{P}}_{\mu}(t_2, \dots t_n)$$

ist. Dabei verschwinden $\mathring{\mathfrak{P}}_1, \dots \mathring{\mathfrak{P}}_{\mu}$, $\dot{\mathfrak{P}}_1, \dots \dot{\mathfrak{P}}_{\nu}$ sämtlich an der Stelle $(t_2 = 0, \dots t_n = 0)$, während sowohl $\overline{\mathfrak{P}}_0(0, \dots 0)$ als auch $\overline{\mathfrak{P}}_1(0, \dots 0)$ einen von Null verschiedenen Werth hat.

Man nehme nun eine positive Grösse δ

so an, dass für jedes den Bedingungen

$$|t_1| \leqq \delta, \dots |t_n| \leqq \delta$$

genügende Werthsystem $(t_1, \dots t_n)$ die angegebenen Umformungen von $\bar{F}_0(x_1, \dots x_n)$, $\bar{F}_1(x_1, \dots x_n)$ gelten und zugleich $\bar{F}_0(t_1, \dots t_n)$, $\bar{F}_1(t_1, \dots t_n)$ einen von Null verschiedenen Werth haben. Dann kann man ferner eine positive Grösse δ_1, die kleiner als δ ist, so annehmen, dass für jedes den Bedingungen

$$|t_2| \leqq \delta_1, \dots |t_n| \leqq \delta_1$$

genügende Werthsystem $(t_2, \dots t_n)$ jede der beiden Gleichungen

$$G_0(t_1, t_2, \dots t_n) = 0, \quad G_1(t_1, t_2, \dots t_n) = 0$$

nur durch solche Werthe von t_1, die dem absoluten Betrage nach kleiner als δ sind, befriedigt wird. Sind für irgend ein System bestimmter Werthe von $t_2, \dots t_n$

$$t_1', t_1'' \dots t_1^{(m)}$$

die von einander verschiedenen Werthe von t_1, welche der einen oder der andern dieser Gleichungen, oder auch beiden genügen, so hat man

$$\frac{G_1(t_1, t_2, \dots t_n)}{G_0(t_1, t_2, \dots t_n)} = (t_1 - t_1')^{\lambda_1} \dots (t - t_1^{(m)})^{\lambda_m}$$

wo $\lambda_1, \dots \lambda_m$ ganze Zahlen bezeichnen, deren Summe gleich $\nu - \mu$ ist. Hat eine dieser Zahlen einen negativen Werth, so kann man der Grösse t_1 einen solchen Werth geben, dass

$$\left|\frac{G_1(t_1, t_2, \dots t_n)}{G_0(t_1, t_2, \dots t_n)}\right| > g$$

ist, wo g eine beliebig angenommene positive Grösse bedeutet, ohne dass $G_0(t_1, t_2, \dots t_n) = 0$ ist. In Folge der Gleichung

$$\frac{\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n)}{\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n)} = \frac{G_1(t_1, t_2, \dots t_n)}{G_0(t_1, t_2, \dots t_n)} \cdot \frac{\overline{\mathfrak{P}}_1(t_1, \dots t_n)}{\overline{\mathfrak{P}}_0(t_1, \dots t_n)}$$

existiren also in jeder noch so kleinen Umgebung der Stelle $(0, 0 \dots 0)$ Werthsysteme $(x_1, \dots x_n)$ für die der Quotient

$$\frac{\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n)}{\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n)}$$

dem absoluten Betrage nach jede beliebig angenommene Grösse übertrifft.

Daraus folgt sofort, dass, wenn $\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n)$ durch $\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n)$ theilbar sein soll, jede der Zahlen $\lambda_1, \dots \lambda_m$ positiv oder gleich Null, und somit – zunächst unter der Voraussetzung, dass $t_2, \dots t_n$ bestimmte, den Bedingungen

$$|t_2| \leqq \delta_1, \dots |t_n| \leqq \delta_1$$

genügende Werthe haben, und der absolute Betrag der Veränderlichen t_1 nicht grösser als δ sei – $G_1(t_1, t_2, \dots t_n)$ durch $G_0(t_1, t_2, \dots t_n)$ theilbar sein muss. Dazu ist zuerst erforderlich, dass $\nu \geqq \mu$ sei.

Nun kann man aber, wenn diese Bedingung erfüllt ist, und

$$\mathfrak{A}_0 t_1^\mu + \mathfrak{A}_1 t_1^{\mu-1} + \dots + \mathfrak{A}_\mu \quad , \quad \mathfrak{B}_0 t_1^\nu + \mathfrak{B}_1 t_1^{\nu-1} + \dots + \mathfrak{B}_\nu$$

zwei ganze Functionen von t_1 mit unbestimmten Coefficienten sind, zwei andere Functionen

$$C_0 t_1^{\nu-\mu} + \dots + C_{\nu-\mu} \quad , \quad \mathfrak{D}_1 t^{\mu-1} + \dots + \mathfrak{D}_\mu$$

dergestalt bestimmen, dass die Gleichung

$$\mathfrak{A}_0^{\nu-\mu+1}(\mathfrak{B}_0 t_1^\nu + \dots + \mathfrak{B}_\nu) = (\mathfrak{A}_0 t_1^\mu + \dots + \mathfrak{A}_\mu)(C_0 t_1^{\nu-\mu} + \dots + C_{\nu-\mu}) + \mathfrak{D}_1 t^{\mu-1} + \dots + \mathfrak{D}_\mu$$

besteht, und es werden dann

$$C_0, \dots C_{\nu-\mu} \quad , \quad \mathfrak{D}_1, \dots \mathfrak{D}_\mu$$

ganze Functionen von $\mathfrak{A}_0, \dots \mathfrak{A}_\mu$, $\mathfrak{B}_0, \dots \mathfrak{B}_\nu$. Die nothwendigen u. hinreichenden Bedingungen dafür, dass bei bestimmten Werthen von $\mathfrak{A}_0, \dots \mathfrak{A}_\mu$, $\mathfrak{B}_0, \dots \mathfrak{B}_\nu$ und unter der Voraussetzung, dass $\mathfrak{A}_0$ nicht den Werth Null habe,

$$\mathfrak{B}_0 t_1^\nu + \dots + \mathfrak{B}_\nu \text{ durch } \mathfrak{A}_0 t_1^\mu + \dots + \mathfrak{A}_\mu$$

theilbar sei, werden dann durch die μ Gleichungen:

$$\mathfrak{D}_1 = 0, \dots \mathfrak{D}_\mu = 0$$

ausgedrückt.

Setzt man nun

$$\mathfrak{A}_0 = 1, \quad \mathfrak{A}_1 = \overset{\circ}{\mathfrak{P}}_1(t_2, \dots t_n), \dots \mathfrak{A}_\mu = \overset{\circ}{\mathfrak{P}}_\mu(t_2, \dots t_n)$$

$$\mathfrak{B}_1 = 1, \quad \mathfrak{B}_1 = \overset{\prime}{\mathfrak{P}}_1(t_2, \dots t_n), \dots \mathfrak{B}_\nu = \overset{\prime}{\mathfrak{P}}_\nu(t_2, \dots t_n)$$

so werden $C_0, \dots C_{\nu-\mu}$, $\mathfrak{D}_1, \dots \mathfrak{D}_\mu$ Potenzreihen von $t_2, \dots t_n$, die sämtlich an der Stelle $(t_2 = 0, \dots t_n = 0)$ verschwinden und mit

$$\overset{3}{\mathfrak{P}}_0(t_2, \dots t_n), \dots \overset{3}{\mathfrak{P}}_{\nu-\mu}(t_2, \dots t_n) \quad , \quad \overset{4}{\mathfrak{P}}_1(t_2, \dots t_n), \dots \overset{4}{\mathfrak{P}}_\mu(t_2, \dots t_n)$$

bezeichnet werden mögen. Damit $\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n)$ durch $\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n)$ theilbar sei, müssen nun:

$$\overset{4}{\mathfrak{P}}_1(t_2 \ldots t_n), \ldots \overset{4}{\mathfrak{P}}_\mu(t_2, \ldots t_n)$$

sämtlich verschwinden, wenn

$$|t_2| \leqq \delta_1, \ldots |t_n| \leqq \delta_1.$$

Dies ist aber nur möglich, wenn in jeder Reihe sämtliche Coeffizienten gleich Null sind.

Angenommen nun, diese Bedingung sei erfüllt, so hat man

$$\mathfrak{G}_1(t_1, t_2, \ldots t_n) = \mathfrak{G}_0(t_1, t_2, \ldots t_n) \cdot (t_1^{\nu-\mu} + \ldots + \overset{3}{\mathfrak{P}}_{\nu-\mu}(t_2, \ldots t_n))$$

$$= \mathfrak{G}_0(t_1, t_2, \ldots t_n) \cdot \mathfrak{G}_3(t_1, t_2, \ldots t_n)$$

und daher

$$\mathfrak{P}_0(x_1, \ldots x_n) = \mathfrak{G}_0(t_1, t_2, \ldots t_n) \cdot \overline{\mathfrak{P}}_0(t_1, t_2, \ldots t_n)$$

$$\mathfrak{P}_1(x_1, \ldots x_n) = \mathfrak{G}_0(t_1, t_2 \ldots t_n) \cdot \mathfrak{G}_3(t_1, t_2 \ldots t_n) \cdot \overline{\mathfrak{P}}_1(t_1, \ldots t_n)$$

$$= \mathfrak{P}_0(x_1, \ldots x_n) \cdot \mathfrak{G}_3(t_1, t_2 \ldots t_n) \cdot \frac{\overline{\mathfrak{P}}_1(t_1, \ldots t_n)}{\overline{\mathfrak{P}}_0(t_1, \ldots t_n)}$$

$$= \mathfrak{P}_0(x_1 \ldots x_n) \cdot \overline{\mathfrak{P}}_2(t_1, \ldots t_n)$$

Verwandelt man nunmehr $\overline{\mathfrak{P}}_2(t_1, \ldots t_n)$ in eine Potenzreihe von $x_1, \ldots x_n$, so ergibt sich

$$\mathfrak{P}_1(x_1, \ldots x_n) = \mathfrak{P}_0(x_1, \ldots x_n)\, \mathfrak{P}_2(x_1, \ldots x_n)$$

Wir haben also folgenden Satz:

Es seien $\mathfrak{P}_0(x_1, \ldots x_n)$, $\mathfrak{P}_1(x_1, \ldots x_n)$ zwei Potenzreihen von $x_1, \ldots x_n$, welche beide an der Stelle $(x_1 = 0, \ldots x_n = 0)$ verschwinden. Man bilde auf die angegebene Weise die beiden Ausdrücke

$$t_1^\mu + \overset{0}{\mathfrak{P}}_1(t_2, \ldots t_n)\, t_1^{\mu-1} + \ldots + \overset{0}{\mathfrak{P}}_\mu(t_2, \ldots t_n)$$

$$t_1^\nu + \overset{1}{\mathfrak{P}}_1(t_2, \ldots t_n)\, t_1^{\nu-1} + \ldots + \overset{1}{\mathfrak{P}}_\nu(t_2, \ldots t_n),$$

und setze aus $\overset{0}{\mathfrak{P}}_1, \ldots \overset{0}{\mathfrak{P}}_\mu$, $\overset{1}{\mathfrak{P}}_1, \ldots \overset{1}{\mathfrak{P}}_\nu$ die Potenzreihen

$$\overset{4}{\mathfrak{F}}_1(t_2, \dots t_n), \dots \overset{4}{\mathfrak{F}}_\mu(t_2, \dots t_n)$$

zusammen. Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $\mathfrak{F}_1(x_1, \dots x_n)$ durch $\mathfrak{F}_0(x_1, \dots x_n)$ theilbar sei, besteht dann darin, dass in jeder der Reihen $\overset{4}{\mathfrak{F}}_1, \dots \overset{4}{\mathfrak{F}}_\mu$ sämtliche Coefficienten gleich Null sein müssen.

Es geht aber auch aus dem Vorstehenden hervor, dass nur in dem Falle, wo eine der mit $\lambda_1, \dots \lambda_m$ bezeichneten Zahlen negativ ist, $\mathfrak{F}_1$ nicht durch $\mathfrak{F}_0$ theilbar ist. Daraus lässt sich schliessen:

Kann man zeigen, dass der absolute Betrag des Quotienten

$$\frac{\mathfrak{F}_1(x_1, \dots x_n)}{\mathfrak{F}_0(x_1, \dots x_n)},$$

wenn $(x_1, \dots x_n)$ in einer gewissen Umgebung der Stelle $(0, \dots 0)$ und so, dass $\mathfrak{F}_0(x_1, \dots x_n)$ nicht gleich Null ist, angenommen wird, stets kleiner als eine angebbare Grösse ist, so reicht dies aus, um festzustellen, dass $\mathfrak{F}_1(x_1, \dots x_n)$ durch $\mathfrak{F}_0(x_1, \dots x_n)$ theilbar ist.

Denn wäre das Letztere nicht der Fall, so müsste eine der Zahlen $\lambda_1, \dots \lambda_m$ negativ sein, und es existirte, wie gezeigt worden, innerhalb jeder Umgebung der Stelle $(0, \dots 0)$ ein Werthsystem $(x_1, \dots x_n)$, für welches der absolute

Betrag des in Rede stehenden Quotienten jede angebbare Grösse überträfe, ohne dass $\mathfrak{P}_0(x_1, \ldots x_n)$ gleich Null wäre, was der Voraussetzung widerspricht.

In jedem Falle, wo entschieden werden kann, ob der Quotient $\frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{P}_0}$ die angegebene Beschaffenheit hat oder nicht, ist man demnach der Bildung der Reihen $\overset{4}{\mathfrak{P}}_1, \ldots \overset{4}{\mathfrak{P}}_\mu$ überhoben.

Es soll nun ferner untersucht werden, unter welchen Bedingungen zwei Reihen $\mathfrak{P}_0(x_1, \ldots x_n)$, $\mathfrak{P}_1(x_1, \ldots x_n)$, die beide an der Stelle $(0, \ldots 0)$ verschwinden, einen gemeinschaftlichen Theiler von derselben Form, der ebenfalls an der Stelle $(0, \ldots 0)$ verschwindet, besitzen.

Angenommen, man habe

$$\mathfrak{P}_0(x_1, \ldots x_n) = \mathfrak{P}_2(x_1, \ldots x_n) \cdot \mathfrak{P}_3(x_1, \ldots x_n)$$
$$\mathfrak{P}_1(x_1, \ldots x_n) = \mathfrak{P}_2(x_1, \ldots x_n) \cdot \mathfrak{P}_4(x_1, \ldots x_n),$$

und es sei $\mathfrak{P}_2(0, \ldots 0) = 0$. Man verwandle wieder $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1$ auf die angegebene Weise in Functionen von $t_1, \ldots t_n$. Infolge der in Betreff der Functionen $\mathfrak{P}_0(g_{11} t_1, \ldots g_{n1} t_1)$, $\mathfrak{P}_1(g_{11} t_1, \ldots g_{n1} t_1)$ gemachten Voraussetzung kann auch $\mathfrak{P}_2(g_{11} t_1, \ldots g_{n1} t_1)$ nicht für jeden Werth von t_1 verschwinden, die höchste Potenz von t_1, durch welche diese Function theilbar ist, habe den Exponenten λ, so kann man

$\mathfrak{P}_2(x_1, \dots x_n)$ auf die Form $\mathfrak{G}_2(t_1, t_2 \dots t_n)\,\overline{\mathfrak{P}}_2(t_1, \dots t_n)$

bringen, wo

$$\mathfrak{G}_2(t_1, t_2 \dots t_n) = t_1^{\lambda} + \overset{2}{\mathfrak{P}}_1(t_2, \dots t_n)\, t_1^{\lambda-1} + \dots + \overset{2}{\mathfrak{P}}_{\lambda}(t_2, \dots t_n),$$

und $\overline{\mathfrak{P}}_2(0, \dots 0)$ nicht gleich Null ist.

Dann hat man

$$\mathfrak{G}_0(t_1, t_2 \dots t_n) = \mathfrak{G}_2(t_1, t_2 \dots t_n)\, \frac{\overline{\mathfrak{P}}_2(t_1, \dots t_n)}{\overline{\mathfrak{P}}_0(t_1, \dots t_n)}\, \mathfrak{P}_3(x_1, \dots x_n) = \mathfrak{G}_2(t_1, t_2 \dots t_n)\,\overline{\mathfrak{P}}_5(t_1, \dots t_n)$$

$$\mathfrak{G}_1(t_1, t_2 \dots t_n) = \mathfrak{G}_2(t_1, t_2 \dots t_n)\, \frac{\overline{\mathfrak{P}}_2(t_1, \dots t_n)}{\overline{\mathfrak{P}}_0(t_1, \dots t_n)}\, \mathfrak{P}_4(x_1, \dots x_n) = \mathfrak{G}_2(t_1, t_2 \dots t_n)\,\overline{\mathfrak{P}}_6(t_1, \dots t_n)$$

Es sind also

$$\mathfrak{G}_0(t_1, t_2 \dots t_n), \quad \mathfrak{G}_1(t_1, t_2 \dots t_n)$$

beide durch $\mathfrak{G}_2(t_1, t_2 \dots t_n)$ theilbar.

Nun kann man bekanntlich, wenn

$$A_0, A_1, \dots A_\mu, \quad B_0, B_1, \dots B_\nu$$

unbestimmte Grössen bedeuten, aus denselben eine Reihe von ganzen Functionen

$$C, C_1, C_2, \dots$$

zusammensetzen, vermittelst welcher sich die nothwendigen u. hinreichenden Bedingungen dafür, dass bei bestimmten Werthen von $A_0, \dots A_\mu, B_0, \dots B_\nu$ und unter der Voraussetzung, dass weder A_0 noch B_0 gleich Null sei, die Functionen

$$A_0 t_1^{\mu} + \dots + A_\mu, \quad B_0 t_1^{\nu} + \dots + B_\nu$$

einen grössten gemeinschaftlichen Theiler λ^{ten} Grades besitzen, sich folgendermaßen ausdrücken lassen: Es muss in der Reihe der Grössen

$C, C_1, C_2 \ldots C_\lambda$ die erste sein, welche nicht gleich Null ist.

Diese Bedingung als erfüllt vorausgesetzt, stellt sich dann der größte gemeinschaftliche Theiler der beiden Functionen in der Form

$$t_1^\lambda + \frac{C'_\lambda}{C_\lambda} t_1^{\lambda-1} + \ldots + \frac{C_\lambda^{(\lambda)}}{C_\lambda}$$

dar, wo $C'_\lambda, \ldots C_\lambda^{(\lambda)}$ ebenfalls ganze Functionen von $A_0, \ldots A_\mu, B_0, \ldots B_\nu$ sind.

Nimmt man

$$A_0 = 1,\ A_1 = \mathfrak{P}_1^0(t_2, \ldots t_n), \ldots A_\mu = \mathfrak{P}_\mu^0(t_2, \ldots t_n)$$

$$B_0 = 1,\ B_1 = \mathfrak{P}'_1(t_2, \ldots t_n), \ldots B_\nu = \mathfrak{P}'_\nu(t_2, \ldots t_n),$$

so werden $C, C_1, C_2, \ldots; C'_\lambda, C''_\lambda \ldots$ Potenzreihen von $t_2, \ldots t_n$, die mit

$\mathfrak{P}(t_2, \ldots t_n), \mathfrak{P}^{(1)}(t_2, \ldots t_n), \mathfrak{P}^{(2)}(t_2, \ldots t_n) \ldots; \mathfrak{P}^{(\lambda,1)}(t_2, \ldots t_n), \mathfrak{P}^{(\lambda,2)}(t_2, \ldots t_n), \ldots$

bezeichnet werden mögen. Dann muss, damit für ein bestimmtes Werthsystem $(t_2, \ldots t_n)$

$$g_0(t_1, t_2 \ldots t_n),\quad g_1(t_1, t_2 \ldots t_n)$$

als Functionen von t_1 betrachtet, einen gemeinschaftlichen Theiler haben,

$$\mathfrak{P}(t_2, \ldots t_n) = 0$$

sein. Diese Gleichung besteht also bei der in Betreff der Functionen $f_0(x_1, \ldots x_n), f_1(x_1, \ldots x_n)$ gemachten Annahme, wenn man den Grössen $t_2, \ldots t_n$ solche Werthe gibt, für welche die angegebenen Umformungen von f_0, f_1 gelten, woraus folgt, dass die Coefficienten der Reihe $\mathfrak{P}(t_2, \ldots t_n)$ sämtlich gleich Null sein müssen.

Damit ist die nothwendige Bedingung dafür, dass $\mathfrak{P}_0(x_1, .. x_n)$, $\mathfrak{P}_1(x_1, .. x_n)$ einen gemeinschaftlichen Theiler besitzen, festgestellt.

Angenommen nun, es seien für zwei gegebene Potenzreihen $\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n)$, $\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n)$ die im Vorstehenden definirten Functionen

$$G_0(t_1, t_2 .. t_n), \quad G_1(t_1, t_2 .. t_n)$$

$$\mathfrak{P}(t_2 .. t_n), \quad \mathfrak{P}^{(1)}(t_2 .. t_n), \quad \mathfrak{P}^{(2)}(t_2 .. t_n), \dots$$

gebildet, und es ergebe sich, dass die Coefficienten der Reihe $\mathfrak{P}(t_2 .. t_n)$ sämtlich gleich Null sind, so wie ferner, dass in der Reihe der Functionen $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}^{(1)} \dots \mathfrak{P}^{(\lambda)}$ die erste sei, die nicht identisch gleich Null ist. Nimt man dann im Innern des gemeinschaftlichen Convergenzbezirkes der Reihen

$$\overset{0}{\mathfrak{P}}_1(t_2 \dots t_n), \dots \overset{0}{\mathfrak{P}}_\mu(t_2 \dots t_n), \quad \overset{1}{\mathfrak{P}}_1(t_2 \dots t_n), \dots \overset{1}{\mathfrak{P}}_\nu(t_2 \dots t_n)$$

irgend ein bestimmtes Werthsystem $(\tau_2, .. \tau_n)$ der Grössen $t_2, .. t_n$ an und unterwirft diese der Bedingung, dass

$$|t_2| \leqq |\tau_2|, \dots |t_n| \leqq |\tau_n|$$

und $\mathfrak{P}^{(\lambda)}(t_2 \dots t_2)$ nicht gleich Null sein soll, so haben

$$G_0(t_1, t_2 .. t_n), \quad G_1(t_1, t_2 .. t_n),$$

als Functionen von t_1 betrachtet, einen grössten gemeinschaftlichen Theiler vom Grade λ, der zunächst in der Form

$$t_1^\lambda + \frac{\mathfrak{P}^{(\lambda,1)}(t_2, .. t_n)}{\mathfrak{P}^{(\lambda)}(t_2, .. t_n)} t_1^{\lambda-1} + \dots + \frac{\mathfrak{P}^{(\lambda,\lambda)}(t_2, .. t_n)}{\mathfrak{P}^{(\lambda)}(t_2, .. t_n)}$$

erhalten wird. Die Werthe von t_1, für welche diese Function verschwindet, sind sämtlich unter denen, für die $G_0(t_1, t_2 \ldots t_n) = 0$ wird, enthalten. Jeder der letzteren aber hat, wie man auch $t_2 \ldots t_n$ den angegebenen Bedingungen entsprechend annehmen möge, einen endlichen Werth, dessen absoluter Betrag unterhalb einer angebbaren, von $t_2 \ldots t_n$ unabhängigen Grenze liegt. Dasselbe gilt also auch von dem Bruch

$$\frac{\mathfrak{P}^{(\lambda,\lambda')}(t_2 \ldots t_n)}{\mathfrak{P}^{(\lambda)}(t_2 \ldots t_n)} \qquad (\lambda' = 1 \ldots \lambda),$$

woraus sich nach dem Obigen ergibt, daß der Zähler durch den Nenner theilbar ist. Damit ist bewiesen, dass der vorstehende gemeinschaftliche Theiler von $G_0(t_1, t_2 \ldots t_n)$ und $G_1(t_1, t_2 \ldots t_n)$ in der Form

$$G_2(t_1 t_2 \ldots t_n) = t_1^{\lambda} + \mathfrak{P}^{2}_{1}(t_2 \ldots t_n)\, t_1^{\lambda-1} + \ldots + \mathfrak{P}^{2}_{\lambda}(t_2 \ldots t_n)$$

dargestellt werden kann.

Betrachtet man nun wieder $G_0(t_1, t_2 \ldots t_n)$, $G_1(t_1, t_2 \ldots t_n)$, $G_2(t_1, t_2 \ldots t_n)$ als Functionen von t_1 und dividirt die beiden ersten durch die dritte, so ergiebt sich:

$$G_0(t_1, t_2 \ldots t_n) = G_2(t_1, t_2 \ldots t_n)\, G_3(t_1, t_2 \ldots t_n)$$
$$G_1(t_1, t_2 \ldots t_n) = G_2(t_1, t_2 \ldots t_n)\, G_4(t_1, t_2 \ldots t_n)$$

wo G_3, G_4 ganze Functionen von t_1, deren Coefficienten Potenzreihen von $t_2 \ldots t_n$ sind, bezeichnen.

Multiplicirt man sodann die erste dieser

Gleichungen mit $\bar{\mathfrak{P}}_0(t_1, \dots t_n)$, die zweite mit $\bar{\mathfrak{P}}_1(t_1, \dots t_n)$ und drückt darauf $t_1, \dots t_n$ durch $x_1, \dots x_n$ aus, so ergiebt sich:

$$\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n) = \mathfrak{P}_2(x_1, \dots x_n) \cdot \mathfrak{P}_3(x_1, \dots x_n)$$
$$\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n) = \mathfrak{P}_2(x_1, \dots x_n)\, \mathfrak{P}_4(x_1, \dots x_n)$$

wo

$$\mathfrak{P}_2(x_1, \dots x_n) = \mathfrak{G}_2(t_1, t_2 \dots t_n)$$

ist.

Es läßt sich nun ferner beweisen, daß $\mathfrak{P}_3(x_1, \dots x_n)$, $\mathfrak{P}_4(x_1, \dots x_n)$ nicht beide durch eine an der Stelle $(x_1 = 0, \dots x_n = 0)$ verschwindende Potenzreihe von $x_1, \dots x_n$ theilbar sind.

Es ist:

$$\mathfrak{P}_3(x_1, \dots x_n) = \mathfrak{G}_3(t_1, t_2 \dots t_n)\, \bar{\mathfrak{P}}_0(t_1, t_2 \dots t_n)$$
$$\mathfrak{P}_4(x_1, \dots x_n) = \mathfrak{G}_4(t_1, t_2 \dots t_n)\, \bar{\mathfrak{P}}_1(t_1, \dots t_n)$$

Wären nun $\mathfrak{P}_3(x_1, \dots x_n)$, $\mathfrak{P}_4(x_1, \dots x_n)$ beide durch eine an der Stelle $(x_1 = 0, \dots x_n = 0)$ verschwindende Potenzreihe von $x_1, \dots x_n$ theilbar, so müßten sich, wie oben gezeigt worden ist, zwei Größen δ, δ_1 so annehmen lassen, daß für jedes den Bedingungen

$$|t_2| \leqq \delta_1, \dots |t_n| \leqq \delta_1$$

genügende Werthsystem $(t_2, \dots t_n)$ die Gleichungen

$$\mathfrak{G}_3(t_1, t_2 \dots t_n)\, \bar{\mathfrak{P}}_0(t_1, \dots t_n) = 0, \quad \mathfrak{G}_4(t_1, t_2 \dots t_n)\, \bar{\mathfrak{P}}_1(t_1, \dots t_n) = 0$$

durch einen und denselben Werth von t_1, dessen absoluter Betrag kleiner als δ wäre, befriedigt würden. Bei hinlänglich kleinen Werthen von

d. h. müsste dieser Werth von t_1 also den Gleichungen

$$G_3(t_1, t_2 .. t_n) = 0 \quad , \quad G_4(t_1, t_2 .. t_n) = 0$$

genügen, und es hätten somit für jedes den angegebenen Bedingungen entsprechende Werthsystem $(t_2, .. t_n)$

$$G_3(t_1, t_2 .. t_n) \text{ und } G_4(t_1, t_2 .. t_n)$$

als Functionen von t_1 betrachtet einen gemeinschaftlichen Theiler, und daher

$$G_0(t_1, t_2 .. t_n) \text{ und } G_1(t_1, t_2 .. t_n)$$

einen gemeinschaftlichen Theiler, von höherem als dem 1^{ten} Grade. Dies ist aber nicht der Fall wenn man $t_2, ... t_n$ so annimmt, dass $\mathfrak{F}^{(\lambda)}(t_2, .. t_n)$ nicht verschwindet, und es ist somit die Annahme, dass $\mathfrak{P}_3(x_1, .. x_n)$ u. $\mathfrak{P}_4(x_1, .. x_n)$ beide durch eine an der Stelle $(x_1 = 0, .. x_n = 0)$ verschwindende Potenzreihe von $x_1, .. x_n$ theilbar seien, unstatthaft.

Wir haben also den Satz:

Die nothwendige u. hinreichende Bedingung dafür, dass zwei gegebene, an der Stelle $(x_1 = 0, .. x_n = 0)$ verschwindende Potenzreihen $\mathfrak{P}_0(x_1, .. x_n)$, $\mathfrak{P}_1(x_1, .. x_n)$ beide durch eine dritte Reihe von derselben Beschaffenheit theilbar seien, besteht darin, dass die Coefficienten einer bestimmten, nach der gegebenen Vorschrift zu bildenden Potenzreih

von $n-1$ Veränderlichen $t_2, \dots t_n$ sämtlich gleich Null sein müssen. Ferner ist es, wenn diese Bedingung erfüllt ist, stets möglich $\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n)$, $\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n)$ in der Form

$$\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n) = \mathfrak{P}_2(x_1, \dots x_n)\,\mathfrak{P}_4(x_1, \dots x_n)$$

$$\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n) = \mathfrak{P}_2(x_1, \dots x_n)\,\mathfrak{P}_5(x_1, \dots x_n)$$

so auszudrücken, dass $\mathfrak{P}_4(x_1, \dots x_n)$, $\mathfrak{P}_5(x_1, \dots x_n)$ keinen an der Stelle $(x_1 = 0, \dots x_n = 0)$ verschwindenden gemeinschaftlichen Theiler haben.

Anmerkung.

Es lässt sich aus dem Vorhergehenden noch leicht ableiten, dass jede Potenzreihe von $x_1, \dots x_n$, durch welche die gegebenen Reihen beide theilbar sind, nothwendig ein Theiler von $\mathfrak{P}_2(x_1, \dots x_n)$ ist.

Hieran knüpfen sich nun noch einige andere Sätze.

Ich nehme jetzt an, es seien $\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n)$, $\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n)$ nicht beide durch eine an der Stelle $(0, \dots 0)$ verschwindende Potenzreihe von $x_1, \dots x_n$ theilbar, aber $\mathfrak{P}_0(0, \dots 0)$ u. $\mathfrak{P}_1(0, 0 \dots 0)$ gleich Null. Dann giebt es in jeder Umgebung der Stelle $(0, \dots 0)$ unendlich viele Werthsysteme $(x_1, \dots x_n)$, für die sowohl $\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n)$ als $\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n)$ verschwindet. Denn man drücke wieder $\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n)$, $\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n)$ auf die angegebene Weise durch die Veränderlichen $t_1, t_2, \dots t_n$ aus, bestimme die Function $\mathfrak{P}(t_2, \dots t_n)$

und nehme auch die Grössen δ, δ_1 so an, wie oben festgesetzt worden ist. Dann giebt es unendlich viele, den Bedingungen

$$|t_2| \leqq \delta_1, \ldots |t_n| \leqq \delta_1$$

entsprechende Werthsysteme $(t_2, \ldots t_n)$, für die

$$\mathfrak{P}(t_2, \ldots t_n) = 0$$

ist, und zu jedem dieser Werthsysteme giebt es wenigstens einen Werth t_1, dessen absoluter Betrag kleiner als δ ist, und der die beiden Gleichungen

$$G_0(t_1, t_2 \ldots t_n) = 0, \quad G_1(t_1, t_2 \ldots t_n) = 0$$

befriedigt; woraus das zu Beweisende unmittelbar folgt.

Man nehme jetzt im Gebiete der Grössen $x_1, \ldots x_n$ irgend einen die Stelle $(0, \ldots 0)$ umgebenden Bezirk so an, dass für jedes demselben angehörige Werthsystem $(x_1, \ldots x_n)$ nicht nur die Gleichungen

$$\mathfrak{P}_0(x_1, \ldots x_n) = G_0(t_1, t_2 \ldots t_n)\,\overline{\mathfrak{P}}_0(t_1, \ldots t_n)$$
$$\mathfrak{P}_1(x_1, \ldots x_n) = G_1(t_1, t_2 \ldots t_n)\,\overline{\mathfrak{P}}_1(t_1, \ldots t_n)$$

gelten, sondern auch $\overline{\mathfrak{P}}_0(t_1, \ldots t_n)$, $\overline{\mathfrak{P}}_1(t_1, \ldots t_n)$ beide einen von Null verschiedenen Werth haben; und setze, unter $(c_1, \ldots c_n)$ irgend eine bestimmte Stelle dieses Bezirks und unter $(b_1, \ldots b_n)$ die entsprechende Stelle im Gebiete der Grössen $t_1, \ldots t_n$ verstehend,

$$x_1 = c_1 + u_1, \ldots x_n = c_n + u_n$$
$$t_1 = b_1 + s_1, \ldots t_n = b_n + s_n,$$

so dass man

$$u_1 = g_{11} s_1 + \dots + g_{1n} s_n, \quad \dots \quad u_n = g_{n1} s_1 + \dots + g_{nn} s_n$$

$$F_0(c_1+u_1, .. c_n+u_n) = G_0(b_1+s_1, b_2+s_2, .. b_n+s_n)\, \bar{F}_0(b_1+s_1, \dots b_n+s_n)$$

$$F_1(c_1+u_1, .. c_n+u_n) = G_1(b_1+s_1, b_2+s_2, .. b_n+s_n)\, \bar{F}_1(b_1+s_1, \dots b_n+s_n)$$

hat.

Es können nun $F_0(c_1+u_1, .. c_n+u_n)$, $F_1(c_1+u_1, .. c_n+u_n)$ als Potenzreihen von $u_1, .. u_n$ betrachtet, einen an der Stelle $(u_1=0, \dots u_n=0)$ verschwindenden gemeinschaftlichen Theiler nur in dem Falle besitzen, wo $F_0(c_1, .. c_n)$, $F_1(c_1, .. c_n)$ beide gleich Null sind.

Dann ist auch

$$G_0(b_1, b_2 .. b_n) = 0, \quad G_1(b_1, b_2 .. b_n) = 0;$$

es geht aber aus den Ausdrücken G_0, G_1 hervor, dass weder $G_0(b_1+s_1, b_2 .. b_n)$ noch $G_1(b_1+s_1, b_2 .. b_n)$ für jeden Werth von s_1 verschwindet; man kann also

$(b_1+s_1, b_2+s_2, .. b_n+s_n)$ auf die Form $(s_1^m + \mathring{F}(s_2, .. s_n)_1 s_1^{m-1} + \dots + \mathring{F}(s_2, .. s_n)_m)\, \bar{F}(s_1, .. s_n)_0$

$(b_1+s_1, b_2+s_2, .. b_n+s_n)$ " " " $(s_1^n + \dot{F}(s_2, .. s_n)_1 s_1^{n-1} + \dots + \dot{F}(s_2, .. s_n)_n)\, \bar{F}(s_1, .. s_n)_1$

in der Art bringen, dass $\mathring{F}(0, .. 0)_1, \dots \mathring{F}(0, .. 0)_m$, $\dot{F}(0, .. 0)_1, \dots \dot{F}(0, .. 0)_n$ sämtlich gleich Null sind, während $\bar{F}(0, .. 0)_0$, $\bar{F}(0, .. 0)_1$ beide einen von Null verschiedenen Werth haben.

Angenommen nun, es wären $F_0(c_1+u_1, \dots c_n+u_n)$, $F_1(c_1+u_1, .. c_n+u_n)$ beide durch eine dritte an der Stelle $(u_1=0, .. u_n=0)$ verschwindende Potenzreihe von $u_1, .. u_n$ theilbar, so würde sich nach dem Vorhergehenden zu jedem System

unendlich kleiner Werthe von $s_2, \ldots s_n$ ein ebenfalls unendlich kleiner Werth von s_1 finden lassen, für den

$$G_0(b_1+s_1, b_2+s_2, \ldots b_n+s_n), \quad G_1(b_1+s_1, b_2+s_2, \ldots b_n+s_n)$$

beide gleich Null wären. Dann aber müsste

$$\mathfrak{P}(b_2+s_2, \ldots b_n+s_n) = 0$$

sein für jedes System unendlich kleiner Werthe von $s_2, \ldots s_n$, was nach einem bekannten Satze nur der Fall ist, wenn

$$\mathfrak{P}(t_2, \ldots t_n)$$

für jedes dem Convergenzbezirk der Reihe angehörige Werthsystem $(t_2, \ldots t_n)$ verschwindet, also die Coefficienten der Reihe sämtlich gleich Null sind. Bei der in Betreff der Reihen $\mathfrak{P}_0(x_1, \ldots x_n)$, $\mathfrak{P}_1(x_1, \ldots x_n)$ gemachten Annahme ist aber $\mathfrak{P}(t_2, \ldots t_n)$ nicht identisch gleich Null, und es ist somit erwiesen:

Wenn die Reihen $\mathfrak{P}_0(x_1, \ldots x_n)$, $\mathfrak{P}_1(x_1, \ldots x_n)$ keinen an der Stelle $(x_1 = 0, \ldots x_n = 0)$ verschwindenden gemeinschaftlichen Theiler besitzen, so haben auch $\mathfrak{P}_0(c_1+u_1, \ldots c_n+u_n)$, $\mathfrak{P}_1(c_1+u_1, \ldots c_n+u_n)$ als Potenzreihen von $u_1, \ldots u_n$ betrachtet, keinen an der Stelle $(u_1 = 0, \ldots u_n = 0)$ verschwindenden gemeinschaftlichen Theiler, vorausgesetzt, dass die Stelle $(x_1 = c_1, \ldots x_n = c_n)$ innerhalb einer gewissen – oben definirten – Umgebung der Stelle $(x_1 = 0, \ldots x_n = 0)$ ange-

nommen werde.

3.

Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen beliebig vieler Veränderlichen.

Ich sage von einer eindeutigen analytischen Function $f(x_1, .. x_n)$ sie verhalte sich an einer bestimmten Stelle $(a_1, .. a_n)$ regulär, wenn sie in einer gewissen Umgebung dieser Stelle durch eine Reihe von der Form

$$\Sigma \left\{ A_{\nu_1, .. \nu_n} (x_1 - a_1)^{\nu_1} \cdots (x_n - a_n)^{\nu_n} \right\}$$
$$(\nu_1, .. \nu_n = 0 \ldots \infty)$$

dargestellt werden kann, wo $\nu_1, .. \nu_n$ ganze Zahlen bezeichnen, und unter den Coefficienten $A_{\nu_1, .. \nu_n}$ von $x_1, .. x_n$ unabhängige Grössen zu verstehen sind. Diese Reihe nenne ich dann ein reguläres Element der Function. Dabei ist zu bemerken, dass die Grössen $a_1, .. a_n$ zum Theil oder auch alle den Werth ∞ haben können, wenn festgesetzt wird, dass das Zeichen $x - \infty$ gleichbedeutend mit $\frac{1}{x}$ sein soll.

Aus der vorstehenden Definition ergibt sich nun sofort:

Verhält sich eine eindeutige analytische Function $f(x_1, .. x_n)$ regulär an einer bestimmten

Stelle $(a_1, .. a_n)$ so gilt dasselbe auch von jeder Stelle $(a'_1, .. a'_n)$, die in einer gewissen Umgebung der ersteren liegt.

Denn es sei $\mathfrak{P}(x_1 - a_1, .. x_n - a_n)$ die Reihe, welche die betrachtete Function in der Umgebung von $(a_1, .. a_n)$ darstellt, so lässt sich aus derselben, wenn man im Innern ihres Convergenzbezirkes eine Stelle $(a'_1, .. a'_n)$ willkürlich annimmt, eine andere Reihe $\mathfrak{P}_1(x_1 - a'_1, .. x_n - a'_n)$ dergestalt ableiten, dass für alle einer gewissen Umgebung der Stelle $(a'_1, .. a'_n)$ angehörigen Werthsysteme $(x_1, .. x_n)$ die Gleichung

$$\mathfrak{P}_1(x_1 - a'_1, .. x_n - a'_n) = \mathfrak{P}(x_1 - a_1, .. x_n - a_n)$$

besteht. Es ist also $\mathfrak{P}_1(x_1 - a'_1, .. x_n - a'_n)$ ebenfalls ein Element der Function $f(x_1, .. x_n)$ und es verhält sich diese demnach auch an der Stelle $(a'_1, .. a'_n)$ regulär.

Die Gesammtheit der Stellen, an denen die Function $f(x_1, .. x_n)$ sich regulär verhält, bildet hiernach ein einfach zusammenhangendes, $2n$-fach ausgedehntes Continuum im Gebiet der Grössen $x_1, .. x_n$.

Dieses Continuum ist nun nothwendig begrenzt.

Angenommen nämlich, es sei $\mathfrak{P}(x_1 - a_1, .. x_n - a_n)$ irgend ein Element der Function f, wobei vorausgesetzt werde, dass die Stelle $(a_1, .. a_n)$ im

Endlichen liege; so können zwei Fälle eintreten:

1) convergirt die Reihe $\mathfrak{P}(x_1 - a_1, .. x_n - a_n)$ für jedes System endlicher Werthe der Grössen $x_1, .. x_n$, so besteht, wenn $\mathfrak{P}_1(x_1 - a_1', .. x_n - a_n')$ irgend ein reguläres Element der Function f ist, für jedes dem Convergenzbezirk der Reihe $\mathfrak{P}_1$ angehörige System endlicher Werthe von $x_1, ... x_n$ die Gleichung

$$\mathfrak{P}_1(x_1 - a_1', .. x_n - a_n') = \mathfrak{P}(x_1 - a_1, ... x_n - a_n).$$

dies ist aber unmöglich, wenn die Grössen $a_1', .. a_n'$ nicht sämtlich endliche Werthe haben, woraus folgt, dass in dem angenommenen Falle eine Stelle $(x_1, .. x_n)$ im Innern oder an der Grenze des in Rede stehenden Continuums liegt, je nachdem die Grössen $x_1, ... x_n$ sämtlich endliche Werthe haben oder nicht.

2) Liegen die den Convergenzbezirk der Reihe $\mathfrak{P}(x_1 - a_1, .. x_n - a_n)$ begrenzenden Stellen alle oder zum Theil im Endlichen, so giebt es, wie in der Functionentheorie gezeigt wird, unter ihnen mindestens eine Stelle, an der sich $f(x_1, .. x_n)$ nicht regulär verhält; eine solche Stelle liegt dann auch an der Grenze des in Rede stehenden Continuums.

Dies festgestellt, nenne ich jede an der Grenze dieses Continuums liegende Stelle eine

singuläre Stelle für die betrachtete Function.

Ist $(a'_1, .. a'_n)$ eine solche singuläre Stelle, so kann es möglicherweise eine Potenzreihe

$$\mathfrak{P}_0(x_1 - a'_1, .. x_n - a'_n)$$

geben, die für $x_1 = a'_1, .. x_n = a'_n$ verschwindet u. so beschaffen ist, dass das Product

$$\mathfrak{P}_0(x_1 - a'_1, .. x_n - a'_n)\, f(x_1, .. x_n)$$

für alle einer gewissen Umgebung der Stelle $(a'_1, .. a'_n)$ angehörigen Werthsysteme $(x_1, .. x_n)$ in der Form

$$\mathfrak{P}_1(x_1 - a'_1, .. x_n - a'_n)$$

dargestellt werden kann. In diesem Falle nenne ich $(a'_1, .. a'_n)$ eine ausserwesentliche, in jedem andern Falle eine wesentliche singuläre Stelle.

Es giebt aber, wenn $n > 1$ ist zwei wohl von einander zu unterscheidende Arten von ausserwesentlichen singulären Stellen.

Ist $(a_1, .. a_n)$ irgend eine solche Stelle, so lässt sich die Function $f(x_1, .. x_n)$ für hinlänglich kleine Werthe der Differenzen $x_1 - a_1, .. x_n - a_n$ stets dergestalt in der Form

$$\frac{\mathfrak{P}_1(x_1 - a_1, .. x_n - a_n)}{\mathfrak{P}_0(x_1 - a_1, .. x_n - a_n)} = f(x_1 .. x_n)$$

darstellen, dass $\mathfrak{P}_0(x_1 - a_1, .. x_n - a_n)$, $\mathfrak{P}_1(x_1 - a_1, .. x_n - a_n)$ nicht beide durch eine dritte, an der Stelle

$(a_1, \ldots a_n)$ verschwindende Reihe $\mathfrak{P}(x_1 - a_1, \ldots x_n - a_n)$ theilbar sind.

Wenn dann $\mathfrak{P}_1(x_1 - a_1, \ldots x_n - a_n)$ an der Stelle $(a_1, \ldots a_n)$ einen von Null verschiedenen Werth hat, so ist für alle einer unendlich kleinen Umgebung der Stelle $(a_1, \ldots a_n)$ angehörigen Werthsysteme $(x_1, \ldots x_n)$ der Werth von $f(x_1, \ldots x_n)$ unendlich groß, und daher

$$f(x_1, \ldots x_n) = \infty \text{ für } x_1 = a_1, \ldots x_n = a_n$$

Verschwinden dagegen $\mathfrak{P}_0(x_1 - a_1, \ldots x_n - a_n)$, $\mathfrak{P}_1(x_1 - a_1, \ldots x_n - a_n)$ beide an der Stelle $(a_1, \ldots a_n)$ so kann man (nach № 1), indem man homogene lineare Functionen $t_1, t_2 \ldots t_n$ von $x_1 - a_1, \ldots x_n - a_n$ einführt, in mannigfaltiger Weise

$\mathfrak{P}_0(x_1 - a_1, \ldots x_n - a_n)$ auf die Form $\left(t_1^{\mu} + \mathring{\mathfrak{P}}_1(t_2 \ldots t_n) t_1^{\mu-1} + \ldots + \mathring{\mathfrak{P}}_{\mu}(t_2 \ldots t_n)\right) \overline{\mathfrak{P}}_0(x_1 - a_1, \ldots x_n - a_n)$

$\mathfrak{P}_1(x_1 - a_1, \ldots x_n - a_n)$ " " " $\left(t_1^{\nu} + \acute{\mathfrak{P}}_1(t_2 \ldots t_n) t_1^{\nu-1} + \ldots + \acute{\mathfrak{P}}_{\nu}(t_2 \ldots t_n)\right) \overline{\mathfrak{P}}_1(x_1 - a_1, \ldots x_n - a_n)$

bringen, dergestalt, dass

$$\mathring{\mathfrak{P}}_1(t_2 \ldots t_n), \ldots \mathring{\mathfrak{P}}_{\mu}(t_2 \ldots t_n), \quad \acute{\mathfrak{P}}_1(t_2 \ldots t_n), \ldots \acute{\mathfrak{P}}_{\nu}(t_2 \ldots t_n)$$

für $t_2 = 0, \ldots t_n = 0$ verschwinden, $\overline{\mathfrak{P}}_0(x_1 - a_1, \ldots x_n - a_n)$, $\overline{\mathfrak{P}}_1(x_1 - a_1, \ldots x_n - a_n)$ aber an der Stelle $(x_1 = a_1, \ldots x_n = a_n)$ beide einen von Null verschiedenen Werth haben. Dann muß unter den Größen $t_2, \ldots t_n$ eine bestimmte Gleichung

$$\mathfrak{P}(t_2, \ldots t_n) = 0$$

bestehn, wenn $\mathfrak{P}_0(x_1 - a_1, \ldots x_n - a_n)$, $\mathfrak{P}_1(x_1 - a_1, \ldots x_n - a_n)$ beide an der Stelle $(a_1, \ldots a_n)$ verschwinden sollen.

Daraus folgt, dass es in jeder noch so kleinen Umgebung von $(a_1, .. a_n)$ andre Stellen $(x_1, .. x_n)$ giebt, an denen $\mathfrak{F}_0(x_1-a_1, .. x_n-a_n)$ verschwindet, $\mathfrak{F}_1(x_1-a_1, .. x_n-a_n)$ aber nicht, so dass an jeder solchen Stelle $f(x_1, .. x_n) = \infty$ ist. Es hat aber, wenn b eine beliebig angenommene endliche Grösse ist, die Function

$$\frac{1}{f(x_1, .. x_n) - b}$$

in der Umgebung von $(a_1, .. a_n)$ dieselbe Form wie $f(x_1, .. x_n)$; es existiren also in jeder Umgebung von $(a_1, .. a_n)$ auch Stellen, an denen

$$\frac{1}{f(x_1, .. x_n) - b} = \infty$$

d. h.
$$f(x_1, .. x_n) = b$$
ist.

Es kann also $f(x_1, .. x_n)$ in dem jetzt betrachteten Falle <u>in einer unendlich kleinen Umgebung der singulären Stelle $(a_1, .. a_n)$ jeden beliebigen Werth annehmen</u> und besitzt deshalb an dieser Stelle selbst keinen bestimmten Werth.

Hierzu ist noch folgendes zu bemerken:

Die Gesammtheit der Stellen, an denen sich $f(x_1, .. x_n)$ wie eine rationale Function verhält – d. h. die Gesammtheit der nicht singulären u. der ausserwesentlichen singulä

ren Stellen –, ist ein $2n$-fach ausgedehntes Continuum, dessen Begrenzung die wesentlichen singulären Stellen bilden.

Ist $(a_1, .. a_n)$ irgendeine bestimmte Stelle im Innern dieses Continuums, und hat $f(a_1, .. a_n)$ einen bestimmten endlichen Werth, so verhält sich, – wie schon oben angegeben worden ist – $f(x_1, .. x_n)$ in einer bestimmten Umgebung der Stelle $(a_1, .. a_n)$ überall regulär.

Ist $f(a_1, .. a_n) = \infty$, so giebt es in jeder Umgebung der Stelle $(a_1, .. a_n)$, die keine singuläre Stelle der Function

$$\frac{1}{f(x_1, ... x_n)}$$

enthält, unendlich viele, eine $(2n-2)$-fache Mannigfaltigkeit bildende Stellen, an denen die Function $f(x_1, .. x_n)$ den Werth ∞ hat, während sie sich an allen übrigen Stellen des genannten Bereiches regulär verhält.

Hat endlich $f(x_1, .. x_n)$ an der Stelle $(a_1, .. a_n)$ keinen bestimmten Werth, so giebt es in jeder Umgebung dieser Stelle nicht nur unendlich viele andere singuläre Stellen, an denen $f(x_1, .. x_n)$ den Werth ∞ hat – was schon vorhin nachgewiesen ist, – son-

dern auch, wenn $n > 2$ ist, unendlich viele Stellen, an denen $f(x_1, .. x_n)$ keinen bestimmten Werth hat. Das Letztere läßt sich folgendermaßen zeigen:

Es gelte für alle Werthsysteme $(x_1, .. x_n)$ in der Umgebung von $(a_1, .. a_n)$ die Gleichung

$$\mathfrak{P}_0(x_1 - a_1, .. x_n - a_n) f(x_1, .. x_n) = \mathfrak{P}_1(x_1 - a_1, .. x_n - a_n),$$

unter der gestatteten Annahme, dass die Potenzreihen $\mathfrak{P}_0$, $\mathfrak{P}_1$ keinen an der Stelle $(a_1, .. a_n)$ verschwindenden gemeinschaftlichen Theiler haben. Innerhalb des gemeinschaftlichen Convergenzbezirks der beiden Reihen nehme man eine Stelle $(a'_1, ... a'_n)$ zunächst beliebig an, und setze:

$$x_1 - a_1 = \xi_1, \ldots \quad x_n - a_n = \xi_n$$
$$x_1 - a'_1 = \xi'_1, \ldots \quad x_n - a'_n = \xi'_n$$

Ferner sei c_κ der Werth von ξ_κ für $x_\kappa = a'_\kappa$, $\eta_\kappa = \xi_\kappa - c_\kappa$, so sind ξ'_κ, η_κ lineare Functionen von x_κ, die beide für $x_\kappa = a'_\kappa$ verschwinden, man hat daher

$$\eta_\kappa = \frac{h_\kappa \xi'_\kappa}{1 + l_\kappa \xi'_\kappa}, \quad \xi'_\kappa = \frac{\eta_\kappa}{h_\kappa - l_\kappa \eta_\kappa}, \quad (\kappa = 1 \ldots n)$$

wo h_κ, l_κ Constanten bezeichnen. (Wenn a_κ nicht $= \infty$ ist, so ist $h_\kappa = 1$, $l_\kappa = 0$).

Entwickelt man nun

$$\mathfrak{P}_0(c_1 + \eta_1, \ldots c_n + \eta_n), \ \mathfrak{P}_1(c_1 + \eta_1, \ldots c_n + \eta_n)$$

nach Potenzen von $\eta_1, .. \eta_n$ und verwandelt die

so sich ergebenden Reihen in Potenzreihen von $\xi'_1, .. \xi'_n$, die mit

$$\mathfrak{P}_2(\xi'_1, .. \xi'_n), \ \mathfrak{P}_3(\xi'_1, .. \xi'_n)$$

bezeichnet werden mögen, so gelten für alle einer bestimmten Umgebung der Stelle $(a'_1, .. a'_n)$ angehörigen Werthsysteme $(x_1, .. x_n)$ die Gleichungen

$$\mathfrak{P}_0(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n) = \mathfrak{P}_2(x_1 - a'_1, \dots x_n - a'_n),$$

$$\mathfrak{P}_1(x_1 - a_1, \dots x_n - a_n) = \mathfrak{P}_3(x_1 - a'_1, \dots x_n - a'_n),$$

$$\mathfrak{P}_2(x_1 - a'_1, .. x_n - a'_n) f(x_1, .. x_n) = \mathfrak{P}_3(x_1 - a'_1, .. x_n - a'_n)$$

Nun nehme man – was dem am Schlusse von № 2 Bewiesenen zufolge stets angeht – n positive Grössen $C_1, .. C_n$ so an, dass erstens die Stelle $(\xi_1 = C_1, .. \xi_n = C_n)$ im gemeinschaftlichen Convergenzbezirk der Reihen $\mathfrak{P}_0(\xi_1, .. \xi_n)$, $\mathfrak{P}_1(\xi_1, .. \xi_n)$ liegt, und dass zweitens, wenn man $c_1, .. c_n$ den Bedingungen

$$|c_1| \leqq C_1, \dots |c_n| \leqq C_n$$

unterwirft, $\mathfrak{P}_0(c_1 + \eta_1, .. c_n + \eta_n)$, $\mathfrak{P}_1(c_1 + \eta_1, .. c_n + \eta_n)$ als Potenzreihen von $\eta_1, .. \eta_n$ betrachtet, keinen an der Stelle $(\eta_1 = 0, .. \eta_n = 0)$ verschwindenden gemeinschaftlichen Theiler haben. Dann besitzen auch die Reihen $\mathfrak{P}_2(x_1 - a'_1, .. x_n - a'_n)$ und $\mathfrak{P}_3(x_1 - a'_1, .. x_n - a'_n)$, wie sofort erhellt, keinen an der Stelle $(x_1 = a'_1, \dots x_n = a'_n)$ verschwindenden gemeinschaftlichen Theiler, und es hat daher nach dem vorhin Bewiesenen

$f(x_1, .. x_n)$ an der Stelle $(a_1', .. a_n')$ keinen bestimmten Werth, wenn $\mathfrak{P}_2(0, .. 0)$, $\mathfrak{P}_3(0, .. 0)$ beide gleich Null sind. Es giebt aber, wenn $n > 2$ ist, wie am Schlusse von N: 2 gezeigt worden ist, unendlich viele, den vorstehenden Bedingungen genügende Werthsysteme $(c_1, .. c_n)$, für welche die beiden Gleichungen

$$\mathfrak{P}_0(c_1, .. c_n) = 0\,,\quad \mathfrak{P}_1(c_1, .. c_n) = 0$$

bestehen, jedem dieser Werthsysteme, deren Gesammtheit eine $(2n-4)$-fache Mannigfaltigkeit bildet, entspricht also im Gebiete der Grössen $x_1, .. x_n$ innerhalb des durch die Bedingungen

$$|x_1 - a_1| \leqq C_1\,, \;\ldots\; |x_n - a_n| \leqq C_n$$

definirten Bezirkes eine Stelle $(a_1', .. a_n')$, an der $f(x_1, .. x_n)$ keinen bestimmten Werth hat.

Hieran knüpft sich noch eine wichtige Bemerkung:

Es seien zwei beliebige Potenzreihen

$$\mathfrak{P}_0(x_1 - a_1, \ldots x_n - a_n)\,,\quad \mathfrak{P}_1(x_1 - a_1, .. x_n - a_n)$$

gegeben, so lässt sich für die dem Innern des gemeinschaftlichen Convergenzbezirks der beiden Reihen angehörigen Stellen $(x_1, .. x_n)$ deren Gesammtheit mit G bezeichnet werde, eine eindeutige Function $f(x_1, .. x_n)$ in folgender Weise definiren:

Ist $x_1', .. x_n'$ eine Stelle von G, an der $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1$

nicht beide verschwinden, so soll

$$f(x_1', \dots x_n') = \frac{\mathfrak{P}_1(x_1'-a_1, \dots x_n'-a_n)}{\mathfrak{P}_0(x_1'-a_1, \dots x_n'-a_n)}$$

sein.

Hat aber an einer Stelle $(x_1', \dots x_n')$ sowohl $\mathfrak{P}_1$ als $\mathfrak{P}_0$ den Werth Null, so bringe man auf die im Vorhergehenden angegebene Weise

$\mathfrak{P}_0(x_1-a_1, \dots x_n-a_n)$ auf die Form $\mathfrak{P}_2(x_1-x_1', \dots x_n-x_n')\,\mathfrak{P}_4(x_1-x_1', \dots x_n-x_n')$

$\mathfrak{P}_1(x_1-a_1, \dots x_n-a_n)$ " " " $\mathfrak{P}_3(x_1-x_1', \dots x_n-x_n')\,\mathfrak{P}_4(x_1-x_1', \dots x_n-x_n')$,

in der Art, dass die Reihen $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ keinen an der Stelle $(x_1 = x_1', \dots x_n = x_n')$ verschwindenden gemeinschaftlichen Theiler haben.

Wenn dann

$$\mathfrak{P}_2(0, \dots 0)\,,\ \mathfrak{P}_3(0, \dots 0)$$

nicht beide gleich Null sind, so soll

$$f(x_1', \dots x_n') = \frac{\mathfrak{P}_3(0, \dots 0)}{\mathfrak{P}_2(0, \dots 0)}$$

sein. Dagegen soll, wenn sowohl $\mathfrak{P}_3(0, \dots 0) = 0$ als $\mathfrak{P}_2(0, \dots 0) = 0$ ist, $f(x_1, \dots x_n)$ an der Stelle $(x_1', \dots x_n')$ keinen bestimmten Werth haben.

Dies lässt sich auch so ausdrücken. Ist $(x_1', \dots x_n')$ irgend eine bestimmte Stelle von $\mathfrak{G}$, so kann man stets zwei Potenzreihen

$$\mathfrak{P}_2(x_1-x_1', \dots x_n-x_n'),\ \ \mathfrak{P}_3(x_1-x_1', \dots x_n-x_n')$$

ohne einen an der Stelle $(x_1 = x_1', \dots x_n = x_n')$ ver-

schwindenden gemeinschaftlichen Theiler so bestimmen, dass an allen einer bestimmten Umgebung der Stelle $(x_1', \dots x_n')$ angehörigen Stellen die Gleichung

$$\mathfrak{P}_3(x_1-x_1', \dots x_n-x_n')\,\mathfrak{P}_0(x_1-a_1, \dots x_n-a_n) = \mathfrak{P}_2(x_1-x_1', \dots x_n-x_n')\,\mathfrak{P}_1(x_1-a_1, \dots x_n-a_n)$$

besteht. Dann ist

$$f(x_1', \dots x_n') = \frac{\mathfrak{P}_3(0, \dots 0)}{\mathfrak{P}_2(0, \dots 0)}$$

zu setzen, mit der Massgabe, dass, wenn so dargestellt $f(x_1', \dots x_n')$ in der Form $\frac{0}{0}$ erscheint, der Function f an der Stelle $(x_1', \dots x_n')$ kein bestimmter Werth beizulegen ist.

Es ist nun zu zeigen, dass die so definirte Function $f(x_1, \dots x_n)$ innerhalb des Bereiches $\mathfrak{G}$ eine eindeutige analytische Function ist, für welche diejenigen Stellen, an denen sie der gegebenen Definition gemäss den Werth ∞ hat oder unbestimmt ist, außerwesentliche singuläre Stellen in dem oben festgestellten Sinne sind, während sie an allen übrigen Stellen sich regulär verhält.

Es sei $(x_1', \dots x_n')$ irgend eine bestimmte Stelle von $\mathfrak{G}$, und

$$\mathfrak{P}_0(x_1-a_1, \dots x_n-a_n) = \mathfrak{P}_2(x_1-x_1', \dots x_n-x_n')\cdot\mathfrak{P}_4(x_1-x_1', \dots x_n-x_n')$$

$$\mathfrak{P}_1(x_1-a_1, \dots x_n-a_n) = \mathfrak{P}_3(x_1-x_1', \dots x_n-x_n')\cdot\mathfrak{P}_4(x_1-x_1', \dots x_n-x_n'),$$

wo $\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \mathfrak{P}_4$ dieselbe Bedeutung wie im Vorstehen

den haben, und $\mathfrak{P}_4$ sich auf eine Constante reduciren kann. Nach dem oben Bewiesenen kann man nun eine Umgebung der Stelle $(x_1', .. x_n')$ so bestimmen, dass, wenn $(x_1'', .. x_n'')$ eine bestimmte Stelle dieser Umgebung ist, und man aus $\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \mathfrak{P}_4$ die drei Potenzreihen $\overline{\mathfrak{P}}_2, \overline{\mathfrak{P}}_3, \overline{\mathfrak{P}}_4$ von $x_1 - x_1'', .. x_n - x_n''$ ableitet, für welche bei hinlänglich kleinen Werthen dieser Differenzen, die Gleichungen

$$\mathfrak{P}_2(x_1 - x_1', .. x_n - x_n') = \overline{\mathfrak{P}}_2(x_1 - x_1'', .. x_n - x_n'')$$
$$\mathfrak{P}_3(x_1 - x_1', .. x_n - x_n') = \overline{\mathfrak{P}}_3(x_1 - x_1'', .. x_n - x_n'')$$
$$\mathfrak{P}_4(x_1 - x_1', .. x_n - x_n') = \overline{\mathfrak{P}}_4(x_1 - x_1'', .. x_n - x_n'')$$

bestehen, die beiden Reihen $\overline{\mathfrak{P}}_2, \overline{\mathfrak{P}}_3$ keinen an der Stelle $(x_1 = x_1'', .. x_n = x_n'')$ verschwindenden gemeinschaftlichen Theiler besitzen. Wenn dann $f(x_1'', .. x_n'')$ einen bestimmten endlichen Werth hat, so ist

$$f(x_1'', .. x_n'') = \frac{\overline{\mathfrak{P}}_3(0, .. 0)}{\overline{\mathfrak{P}}_2(0, .. 0)} = \frac{\mathfrak{P}_3(x_1'' - x_1', ... x_n'' - x_n')}{\mathfrak{P}_2(x_1'' - x_1', ... x_n'' - x_n')}$$

d. h. es gilt die Gleichung

$$f(x_1, .. x_n) = \frac{\mathfrak{P}_3(x_1 - x_1', .. x_n - x_n')}{\mathfrak{P}_2(x_1 - x_1', .. x_n - x_n')}$$

innerhalb einer gewissen Umgebung der Stelle $(x_1', .. x_n')$ für alle Stellen $(x_1, .. x_n)$, an denen $f(x_1, .. x_n)$ einen bestimmten endlichen Werth hat. Wenn daher $\mathfrak{P}_2(0, .. 0)$ nicht

$= 0$ ist, so verhält sich $f(x_1, .. x_n)$ an der Stelle $(x'_1, .. x'_n)$ regulär. Ist $\mathfrak{P}_2(0, .. 0) = 0$, nicht aber $\mathfrak{P}_3(0, .. 0)$, so kann man die in Rede stehende Umgebung von $(x'_1, .. x'_n)$ so klein annehmen, dass an allen Stellen derselben der absolute Betrag von $f(x_1, .. x_n)$ grösser ist als jede beliebig angenommene endliche Grösse, so dass $f(x'_1, .. x'_n) = \infty$ zu setzen ist, wie der Ausdruck von $f(x_1, .. x_n)$ angiebt. Sind endlich $\mathfrak{P}_2(0, .. 0)$, $\mathfrak{P}_3(0, .. 0)$ beide gleich Null, so giebt es, wie oben gezeigt worden ist, in jeder noch so kleinen Umgebung von $(x'_1, .. x'_n)$ Stellen, an denen die Function $f(x_1, .. x_n)$ einen beliebig vorgeschriebenen Werth hat; sie hat also an der Stelle $(x'_1, .. x'_n)$ selbst keinen bestimmten Werth.

Damit ist bewiesen, dass die in der angegebenen Weise definirte Function $f(x_1, .. x_n)$ innerhalb des Bezirkes $\mathfrak{G}$ sich überall wie eine rationale Function verhält.

4.

Zur Theorie der ganzen eindeutigen Functionen von beliebig vielen Veränderlichen.

Dem Vorstehenden zufolge stellt eine Po-

tenzreihe $\mathfrak{P}(x_1, \dots x_n)$, die für jedes System endlicher Werthe der Veränderlichen $x_1, \dots x_n$ convergirt, eine eindeutige Function $f(x_1, \dots x_n)$ dar, die sich an jeder im Endlichen des Grössengebiets $(x_1, \dots x_n)$ liegenden Stelle regulär verhält.

Umgekehrt weiss man, dass jede eindeutige Function $f(x_1, \dots x_n)$ die sich an allen im Endlichen liegenden Stellen des Gebietes $(x_1, \dots x_n)$ regulär verhält, durch eine für jedes System endlicher Werthe von $x_1, \dots x_n$ convergirende Reihe $\mathfrak{P}(x_1, \dots x_n)$ ausgedrückt werden kann.

Ich nenne eine solche Function $f(x_1, \dots x_n)$ eine <u>ganze</u> Function. Hat die Reihe, durch welche sie dargestellt wird, unendlich viele Glieder, deren Coefficienten nicht gleich Null sind, so ist die Function eine transcendente.

Transcendenten Def.

Sind ferner zwei Potenzreihen $\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n)$, $\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n)$ gegeben, welche beide für jedes System endlicher Werthe von $x_1, \dots x_n$ convergiren, so wird durch den Quotienten

$$\frac{\mathfrak{P}_1(x_1, \dots x_n)}{\mathfrak{P}_0(x_1, \dots x_n)}$$

den in No. 3 festgesetzten Bestimmungen ge-

weiss eine eindeutige Function $f(x_1, .. x_n)$ definirt, die dadurch charakterisirt ist, dass sie sich an jeder im Endlichen liegenden Stelle des Grössengebiets $(x_1, .. x_n)$ wie eine rationale Function verhält.

Frage ob sich der Satz umkehren lässt.

Ob aber umgekehrt jede eindeutige Function $f(x_1, .. x_n)$, welche sich im Endlichen überall wie eine rationale Function verhält, – also wenn $(a_1, .. a_n)$ irgend ein System endlicher Werthe ist, in einer gewissen Umgebung der Stelle $(a_1, .. a_n)$ als Quotient zweier Potenzreihen von $x_1 - a_1, .. x_n - a_n$ ausgedrückt werden kann – auch als Quotient zweier für jedes System endlicher Werthe von $x_1, .. x_n$ convergirenden Potenzreihen sich darstellen lasse, das ist eine für Functionen von mehreren Veränderlichen bis jetzt unerledigte Frage, welche sehr erhebliche Schwierigkeiten darzubieten scheint.

Mit dieser Frage ist aber noch eine andere verknüpft.

Frage 2ter.

Für jede rationale Function von $x_1, .. x_n$ gilt, dass sie als Quotient zweier ganzen Functionen dieser Veränderlichen dargestellt werden kann und

zwar so, dass der Dividend u. der Divisor keinen gemeinschaftlichen Theiler besitzen. Dann verschwinden Dividend und Divisor gleichzeitig nur an solchen Stellen, an denen die Function keinen bestimmten Werth hat. Es entsteht also die Frage, ob in dem Falle, wo eine Function als Quotient zweier ganzen Functionen von $x_1, .. x_n$, von denen wenigstens eine transcendent ist, dargestellt werden kann, dies auch in der Art geschehen könne, dass der Quotient nur bei solchen Werthsystemen der Veränderlichen, für welche die Function unbestimmt ist, in der Form $\frac{0}{0}$ erscheint – mit andern Worten, dass aus den Werthen, welche Dividend u. Divisor an einer bestimmten Stelle haben, sich unmittelbar entnehmen läßt, ob an dieser Stelle die Function einen bestimmten Werth hat oder nicht, und wie sie sich in der Umgebung dieser Stelle verhält. Auch diese Frage ist bis jetzt nur für Functionen von einer Veränderlichen – und zwar für diese im bejahenden Sinne – entschieden.

In manchen Fällen, wo eine eindeutige Function mehrerer Veränderlichen

durch analytische Bestimmungen definirt ist, ist es aber möglich, die angeregten Fragen mittelst eines Theoremes, das ich im Folgenden ausführlich entwickeln will, zu erledigen.

Es sei jetzt $f(x_1, .. x_n)$ eine (transcendente oder rationale) ganze Function. Man setze für $x_1, .. x_n$ ganze lineare Functionen einer Veränderlichen τ

$$x_1 = a_1 + c_1\tau, \; .. \; x_n = a_n + c_n\tau,$$

so geht $f(x_1, ... x_n)$ in eine ganze Function von τ über, welche im Allgemeinen – d.h. wenn die Grössen $c_1, .. c_n$ einer sogleich anzugebenden Beschränkung unterworfen werden – nicht für jeden Werth von τ verschwindet. Denn es erhält $f(x_1, .. x_n)$ nach Potenzen von $x_1 - a_1, .. x_n - a_n$ entwickelt die Form

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (x_1 - a_1, .. x_n - a_n)^\nu,$$

wo $(x_1 - a_1, ... x_n - a_n)^\nu$ eine homogene ganze Function von $x_1 - a_1, .. x_n - a_n$ bezeichnet; es brauchen also die Grössen $c_1, .. c_n$ nur die Bedingung zu erfüllen, dass die Ausdrücke

$$(c_1, ... c_n)^\nu$$

nicht alle gleich Null sind. Dies vorausgesetzt, sei in der Entwicklung von

$f(a_1 + c_1\tau, \ldots a_n + c_n\tau)$ nach Potenzen von τ das erste Glied, dessen Coefficient nicht verschwindet, von der Ordnung μ, so hat man

$$f(a_1 + c_1\tau, \ldots a_n + c_n\tau) = C_\mu \tau^\mu + C_{\mu+1}\tau^{\mu+1} + \ldots,$$

wo C_μ nicht gleich Null ist. Daraus ergiebt sich für hinlänglich kleine Werthe von τ

$$\frac{d \log . f(a_1 + c_1\tau, \ldots a_n + c_n\tau)}{d\tau} = \mu\tau^{-1} + \mathfrak{P}(\tau)$$

Setzt man also

$$d \log . f(x_1, \ldots x_n) = \sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha(x_1, \ldots x_n)\, dx_\alpha,$$

wo $f(x_1, \ldots x_n), \ldots f_n(x_1, \ldots x_n)$ eindeutige Functionen sind, welche sich an jeder im Endlichen liegenden Stelle des Gebietes $(x_1, \ldots x_n)$ wie rationale Functionen verhalten und den Gleichungen

$$\frac{\partial f_\alpha(x_1, \ldots x_n)}{\partial x_\beta} = \frac{\partial f_\beta(x_1, \ldots x_n)}{\partial x_\alpha} \qquad \begin{pmatrix}\alpha = 1 \ldots n\\ \beta = 1 \ldots n\end{pmatrix}$$

genügen so hat man

$$\sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha(x_1, \ldots x_n)\, dx_\alpha = (\mu\tau^{-1} + \mathfrak{P}(\tau))\, d\tau$$

wenn $x_1 = a_1 + c_1\tau, \ldots x_n = a_n + c_n\tau$ gesetzt wird, und es ist dann <u>μ stets entweder gleich Null oder eine positive ganze Zahl.</u>

Dieser Satz läßt sich nun in folgender Weise umkehren:

Es seien n Functionen

$$f_1(x_1, \ldots x_n), \ldots f_n(x_1, \ldots x_n)$$

gegeben, welche den folgenden Bedingungen

genügen:

1, Sie sollen eindeutige Functionen sein, für die wesentliche singuläre Stellen im Endlichen des Grössengebietes $(x_1, .. x_n)$ nicht existiren.

2, der Differentialausdruck

$$\sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha(x_1, .. x_n)\, dx_\alpha$$

soll die durch die Gleichungen

$$\frac{\partial f_\alpha(x_1, .. x_n)}{\partial x_\beta} = \frac{\partial f_\beta(x_1, .. x_n)}{\partial x_\alpha} \quad \begin{pmatrix} \alpha = 1 \dots n \\ \beta = 1 \dots n \end{pmatrix}$$

ausgedrückten Integrabilitätsbedingungen erfüllen:

3, Es soll, wenn man für $x_1, .. x_n$ irgend welche ganze lineare Functionen einer Veränderlichen τ substituirt

$$x_1 = a_1 + c_1\tau, \dots x_n = a_n + c_n\tau$$

für hinlänglich kleine Werthe von τ $\sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha(x_1, .. x_n)\, dx_\alpha$ die Form $(\mu\tau^{-1} + \mathfrak{P}(\tau))\, d\tau$ annehmen, und dann μ entweder gleich Null oder eine positive ganze Zahl sein, vorausgesetzt, dass von den beiden Potenzreihen von $x_1 - a_1, .. x_n - a_n$, als deren Quotient

$$\sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha f_\alpha(x_1, .. x_n)$$

in der Umgebung der Stelle $(a_1, .. a_n)$

$(a_1, .. a_n)$ dargestellt werden kann, der Divisor durch die angegebenen Substitutionen nicht identisch gleich Null werde.

<u>Alsdann existirt eine ganze Function $f(x_1, .. x_n)$, welche der Differentialgleichung</u>

$$d \log f(x_1, .. x_n) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} f_\alpha(x_1, .. x_n)\, d x_\alpha$$

<u>genügt</u> und völlig bestimmt ist, wenn der Werth irgendeines ihrer Coefficienten, der in Folge der vorstehenden Gleichg. nicht nothwendig gleich Null ist, fixirt wird, was in beliebiger Weise geschehen kann.

Um diesen Satz zu beweisen, nehme ich zuerst an, es sei innerhalb einer bestimmten Umgebung der Stelle $(0, .. 0)$ jede Function f_α in der Form

$$f_\alpha(x_1, .. x_n) = \mathfrak{f}_\alpha(x_1, .. x_n) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (x_1, .. x_n)^\nu_\alpha$$

darstellbar. Dann ist infolge der Bedingung (2)

$$\frac{\partial (x_1, .. x_n)^\nu_\alpha}{\partial x_\beta} = \frac{\partial (x_1, .. x_n)^\nu_\beta}{\partial x_\alpha}$$

Setzt man

$$(x_1, .. x_n)^{\nu+1} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{1}{\nu+1} (x_1, .. x_n)^\nu_\alpha\, x_\alpha ,$$

so ist:

$$d(x_1, .. x_n)^{\nu+1} = \sum_{\alpha=1}^{n} \left\{ \frac{1}{\nu+1} (x_1, .. x_n)^\nu_\alpha\, d x_\alpha \right\} + \frac{1}{\nu+1} \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial (x_1, .. x_n)^\nu_\alpha}{\partial x_\beta} x_\alpha\, d x_\beta$$

Es ist aber

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\frac{\partial(x_1,\ldots x_n)_\alpha^\nu}{\partial x_\beta}\,x_\alpha\,dx_\beta=\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\frac{\partial(x_1,\ldots x_n)_\beta^\nu}{\partial x_\alpha}\,x_\alpha\,dx_\beta$$

$$=\sum_{\beta=1}^{n}\nu(x_1,\ldots x_n)_\beta^\nu\,dx_\beta$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{n}\nu(x_1,\ldots x_n)_\alpha^\nu\,dx_\alpha\,,$$

und daher

$$d(x_1,\ldots x_n)^{\nu+1}=\sum_{\alpha=1}^{n}(x_1,\ldots x_n)_\alpha^\nu\,dx_\alpha\,,$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\nu=0}^{\infty}(x_1,\ldots x_n)_\alpha^\nu\,dx_\alpha=d\sum_{\nu=0}^{\infty}(x_1,\ldots x_n)^{\nu+1}$$

Entwickelt man also, unter C eine willkürlich anzunehmende Constante verstehend, den Ausdruck

$$C\,e^{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}(x_1,\ldots x_n)^{\nu+1}}$$

nach Potenzen von $x_1,\ldots x_n$, so genügt die so sich ergebende Potenzreihe, für $f(x_1,\ldots x_n)$ gesetzt, der in Rede stehenden Differentialgleichung und ist sicher convergent in dem gemeinschaftlichen Convergenzbezirk der Entwicklungen von $f_1(x_1,\ldots x_n),\ldots f_n(x_1,\ldots x_n)$.

Zweitens nehme ich an, man habe für alle einer bestimmten Umgebung der Stelle $(0,\ldots 0)$ angehörigen Werthsysteme $(x_1,\ldots x_n)$

$$f_\alpha(x_1,\ldots x_n)=\frac{\mathfrak{P}_\alpha^{(1)}(x_1,\ldots x_n)}{\mathfrak{P}_\alpha^{(0)}(x_1,\ldots x_n)}\,,$$

wobei ich bemerke, dass es nicht eine nothwendige Bedingung ist, dass $\mathfrak{P}_\alpha^{(1)}(x_1,\ldots x_n)$,

$P_\alpha^{(0)}(x_1, .. x_n)$ keinen an der Stelle $(x_1 = 0, .. x_n = 0)$ verschwindenden gemeinschaftlichen Theiler haben. Man substituire nun für $x_1, .. x_n$ homogene lineare Functionen von n anderen Veränderlichen $t_1, .. t_n$

$$x_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} g_{\alpha\beta} t_\beta \qquad (\alpha = 1 \dots n),$$

wodurch sich das Differential

$$\sum_{\alpha=1}^{n} f_n(x_1, .. x_n)\, dx_\alpha$$

in ein andres von der Form

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \varphi_\alpha(t_1, .. t_n)\, dt_\alpha$$

verwandelt, für welches die Integrabilitätsbedingungen ebenfalls erfüllt sind. Die Constanten $g_{\alpha\beta}$ hat man so anzunehmen, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist, und bei keiner der Functionen

$$P_1^{(0)}(g_{11} t_1, \dots g_{n1} t_1), \quad \dots \quad P_n^{(0)}(g_{11} t_1, \dots g_{n1} t_1)$$

wenn man sie nach Potenzen von t_1 entwickelt, sämtliche Coëfficienten verschwinden.

Dann lässt sich

$\varphi_\alpha(t_1, \dots t_n)$ in der Form $\dfrac{P_\alpha(t_1, .. t_n)}{P_0(t_1, .. t_n)}$

darstellen, und es ist $\mathfrak{P}_0(t_1, 0..0)$ eine Potenzreihe von t_1, deren Coefficienten nicht sämtlich gleich Null sind. Ist das Anfangsglied dieser Reihe von der Ordnung l, so nehme man eine positive Grösse δ_1 so an, dass die Stelle $(t_1 = \delta_1, t_2 = 0, .. t_n = 0)$ innerhalb des gemeinschaftlichen Convergenzbezirks der Reihen

$$\mathfrak{P}_0(t_1, .. t_n), \mathfrak{P}_1(t_1, .. t_n), .. \mathfrak{P}_n(t_1, .. t_n)$$

liegt, und die Function

$$t_1^{-l}\,\mathfrak{P}_0(t_1, 0..0)$$

für jeden Werth von t_1, dessen absoluter Betrag nicht grösser als δ_1 ist, einen von Null verschwindenden Werth hat. Wird darauf eine zweite positive Grösse δ', die kleiner als δ_1 ist, beliebig angenommen, so lassen sich $n-1$ andere $\delta_2, .. \delta_n$ so bestimmen, dass die Stelle $(t_1 = \delta_1, t_2 = \delta_2, .. t_n = \delta_n)$ innerhalb des gemeinschaftlichen Convergenzbezirkes der Reihen $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, .. \mathfrak{P}_n$ liegt, und für jedes den Bedingungen:

$$A) \qquad \delta_1 \geqq |t_1| \geqq \delta', \quad |t_2| \leqq \delta_2, \; ... \; |t_n| \leqq \delta_n$$

genügende Werthsystem $(t_1, t_2 .. t_n)$

$$|\mathfrak{P}_0(t_1, 0..0)| > |\mathfrak{P}_0(t_1, t_2 .. t_n) - \mathfrak{P}_0(t_1, 0..0)|$$

ist. Dann giebt es, wie in № 1 gezeigt worden ist, für jedes den Bedingungen

$B)$ $\quad |t_2| \leqq \delta_2, \ldots |t_n| \leqq \delta_n$

entsprechende Werthsystem $(t_2, .. t_n)$ unter denjenigen Werthen von t_1, für welche $|t_1| \leqq \delta$ ist, nicht mehr als l, welche der Gleichung

$$\mathfrak{F}_0(t_1, t_2 .. t_n) = 0$$

genügen, und diese sind ihrem absoluten Betrage nach sämmtlich kleiner als δ'. Nun sei $(t_2', .. t_n')$ irgend ein System bestimmter, den Bedingungen $B)$ genügender Werthe von $t_2, .. t_n$, und es habe die Gleichung

$$\mathfrak{F}_0(t_1, t_2' .. t_n') = 0$$

r von einander verschiedene Wurzeln

$$t_1', t_1'', \ldots t_1^{(r)},$$

welche ihrem absoluten Betrage nach kleiner als δ' sind. Setzt man dann

$$t_1 = t_1' + \tau, \; t_2 = t_2', \ldots t_n = t_n',$$

so werden $x_1, .. x_n$ ganze lineare Functionen von τ, welche der oben (unter 3) angegebenen Bedingung genügen, indem

$$\sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha(x_1, .. x_n)\, dx_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\mathfrak{F}_\alpha(t_1, .. t_n)}{\mathfrak{F}_0(t_1, .. t_n)}\, dt_\alpha$$

ist, und $\mathfrak{F}_0(t_1' + \tau, t_2' .. t_n')$ nicht für jeden Werth von τ verschwindet. Man erhält also für hinlänglich kleine Werthe von τ

$$\varphi_1(t_1' + \tau, t_2' .. t_n') = \frac{m'}{\tau} + \mathfrak{P}'(\tau),$$

wo m' eine ganze Zahl und ≥ 0 ist; und ebenso

$$\varphi_1(t_1''+\tau, t_2', .. t_n') = \frac{m''}{\tau} + \mathfrak{P}''(\tau), \;..\; \varphi_1(t_1^{(r)}+\tau, t_2' .. t_n') = \frac{m^{(r)}}{\tau} + \mathfrak{P}^{(r)}(\tau),$$

wo $m'', .. m^{(r)}$ gleichfalls ganze, nicht negative Zahlen sind. Daraus folgt, dass die Differenz

$$\varphi_1(t_1, t_2', .. t_n') - \left(\frac{m'}{t_1-t_1'} + \frac{m''}{t_1-t_1''} + \cdots + \frac{m^{(r)}}{t_1-t_1^{(r)}}\right)$$

für keinen Werth von t_1, dessen absoluter Betrag kleiner als δ_1 ist, unendlich gross wird und demgemäss in der Form

dargestellt werden kann. Setzt man also:

$$\varphi(t) = (t-t_1')^{m'}(t-t_1'')^{m''} \ldots (t-t_1^{(r)})^{m^{(r)}}$$

so ergiebt sich für jeden der Bedingung $|t_1| < \delta_1$ genügenden Werth von t_1

$$\varphi_1(t_1, t_2' .. t_n') = \frac{1}{\varphi(t_1)} \frac{d\varphi(t_1)}{dt_1} + \mathfrak{P}(t_1)$$

Die Function $\varphi(t)$ lässt sich aber ermitteln, ohne dass es nöthig wäre, die Grössen $t_1', t_1'' \ldots t_n^{(r)}$ und die zugehörigen Zahlen $m', m'', \ldots m^{(r)}$ zu bestimmen.

Man kann, wenn man die Grössen $t_1, t_2 .. t_n$ den Bedingungen

$$C) \quad |t_1| \leqq \delta_1, \; |t_2| \leqq \delta_2, \ldots |t_n| \leqq \delta_n$$

unterwirft, $\mathfrak{F}_0(t_1, t_2 .. t_n)$ in der oben (in N:1) angegebenen Weise auf die Form

$$G_0(t_1, t_2 .. t_n)\, \overline{\mathfrak{F}}_0(t_1, .. t_n)$$

bringen, in der Art, dass $\mathfrak{F}_0(t_1, .. t_n)$ für kein den vorstehenden Bedingungen entsprechendes Werthsystem $(t_1, t_2 .. t_n)$ verschwindet. Die Function $\mathfrak{G}_0(t_1, t_2 .. t_n)$ kann dann nicht unendlich klein werden, wenn man die Grössen $t_1, t_2 .. t_n$ den Bedingungen (A) unterwirft. Für alle diesen Bedingungen genügenden Werthsysteme $(t_1, t_2 .. t_n)$ lässt sich deshalb

$$\frac{1}{\mathfrak{G}_0(t_1, t_2 .. t_n)}$$

in eine gleichmässig convergirende Reihe von der Form

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} T'_\nu t_1^{-l-\nu}$$

entwickeln, in der die Coefficienten T'_ν gewöhnliche Potenzreihen von $t_2 ... t_n$ sind. Diese Reihe convergirt dann auch als Potenzreihe von $t_1, t_2 .. t_n$ betrachtet, bei jeder Anordnung ihrer Glieder. Dasselbe gilt für die gewöhnliche Potenzreihe von $t_1, t_2 .. t_n$, in welche der Quotient

$$\frac{\mathfrak{F}_1(t_1, ... t_n)}{\mathfrak{F}_0(t_1, ... t_n)}$$

verwandelt werden kann, man erhält daher für die jetzt betrachteten Werthsysteme $(t_1, ... t_n)$ die Function $\varphi_1(t_1, .. t_n)$ dargestellt durch eine bei jeder Anordnung ihrer Glie-

der convergirende Potenzreihe der Größen $t_1, t_2, .. t_n$, welche negative Potenzen von t_1 in unendlicher Anzahl, aber keine negativen Potenzen von $t_2, .. t_n$ enthält und somit auf die Form:

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \mathfrak{P}^{(-\mu-1)}(t_2, .. t_n)\, t_1^{-\mu-1} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{P}^{(\nu)}(t_2, .. t_n)\, t_1^{\nu}$$

gebracht werden kann.

Anmerkung.

Diese Reihe erhält man auch dadurch, dass man (unter der Annahme $\delta_1 \geqq |t_1| \geqq \delta'$) die Function $\varphi_0(t_1, t_2 .. t_n)$ als Potenzreihe von $t_2, .. t_n$ darstellt und darauf die Coefficienten derselben, welche sämtlich die Form

$$\frac{\mathfrak{P}(t_1)}{\mathfrak{P}_0^{\nu}(t_1, 0 .. 0)}$$

haben, nach steigenden Potenzen von t_1 entwickelt.

Es läßt sich aber auch

$$\frac{1}{\varphi(t_1)} \frac{d\varphi(t_1)}{dt_1} = \frac{m'}{t_1 - t_1'} + \frac{m''}{t_1 - t_1''} + \cdots + \frac{m^{(r)}}{t_1 - t_1^{(r)}},$$

wenn $|t_1| \geqq \delta'$ ist, in eine Reihe von der Form

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} T_{\mu+1}\, t_1^{-\mu-1}$$

entwickeln, und es ist dann namentlich $T_1' = m' + m'' + \cdots + m^{(r)}$ Man hat also

$$\varphi_1(t_1, t_2', \dots t_n') - \frac{1}{\varphi(t_1)} \frac{d\varphi(t_1)}{dt_1} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \left\{ \mathfrak{P}^{(-\mu-1)}(t_2', \dots t_n') - T_{\mu+1}' \right\} t_1^{-\mu-1}$$
$$+ \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{P}^{(\nu)}(t_2', \dots t_n') t_1^{\nu}$$

Aus dieser Reihe müssen nun dem vorhin Bemerkten zufolge alle Glieder mit einer negativen Potenz von t_1 verschwinden, man hat also

$$T_{\mu+1}' = \mathfrak{P}^{(-\mu-1)}(t_2', \dots t_n') \quad , \quad (\mu = 0 \dots \infty$$

Es ist daher $\mathfrak{P}^{-1}(t_2, \dots t_n)$ für jedes der betrachteten Werthsysteme $(t_2, \dots t_n)$ eine ganze Zahl. Daraus folgt, dass sich $\mathfrak{P}^{(-1)}(t_2, \dots t_n)$ auf ein von $t_2, \dots t_n$ unabhängiges Glied reducirt. Denn wäre dies nicht der Fall, so würde $\mathfrak{P}^{(-1)}(t_2, \dots t_n)$ eine continuirliche Function von $t_2, \dots t_n$ sein, die auch andre als ganzzahlige Werthe haben könnte. Es ist also die Summe $(m' + m'' + \dots + m^{(r)})$ von dem gewählten Werthsystem $(t_2', \dots t_n')$ unabhängig und kann gefunden werden, wenn man gleichzeitig $t_2' = 0, \dots t_n' = 0$ setzt.

Da nun, wenn $t_2', \dots t_n'$ sämtlich gleich Null gesetzt werden,

$$\varphi_1(t_1, 0 \dots 0) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \mathfrak{P}^{(-\mu-1)}(0, \dots 0) t_1^{-\mu-1} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{P}^{(\nu)}(0, \dots 0) t_1^{\nu}$$
$$\frac{d\varphi(t_1)}{dt_1} = (m' + m'' + \dots + m^{(\nu)}) t_1^{-1}$$

ist, und aus der Differenz der Ausdrücke auf der Rechten dieser Gleichungen alle

Glieder mit negativen Potenzen von t, wegfallen müssen, so sieht man, dass die Entwicklung von

$$\varphi_1(t_1, 0 \ldots 0)$$

für jeden Werth von t_1, dessen absoluter Betrag $\leqq \delta_1$ ist, die Gestalt

$$m t_1^{-1} + \mathfrak{P}(t_1)$$

hat, wo m eine ganze Zahl bedeutet, die $\geqq 0$ ist, und dass man

$$m' + m'' + \ldots + m^{(r)} = m$$

hat. Dabei ist noch zu bemerken, dass m immer > 0 ist, wenn nicht etwa jede Function $f_\alpha^{(1)}(x_1, \ldots x_n)$ durch $f_\alpha^{(0)}(x_1, \ldots x_n)$ theilbar ist, welcher Fall schon behandelt worden und hier auszuschliessen ist.

Nachdem so der Grad der Function $\varphi(t_1)$ ermittelt ist, setze man

$$\varphi(t_1) = t_1^m + F_1' t_1^{m-1} + \ldots + F_m',$$

so hat man, zunächst für die der Bedingung

$$\delta_1 \geqq |t_1| \geqq \delta'$$

genügenden Werthe von t_1

$$\frac{1}{\varphi(t_1)} \frac{d\varphi(t_1)}{dt_1} = \sum_{\mu=0}^{\infty} T'_{\mu+1} t_1^{-\mu-1} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \mathfrak{P}^{(-\mu-1)}(t_2' \ldots t_n') t_1^{-\mu-1},$$

$$m t_1^{m-1} + (m-1) F_1' t_1^{m-2} + \ldots + F_{m-1}' = (t_1^m + F_1' t_1^{m-1} + \ldots + F_m')$$
$$\left\{ m t_1^{-1} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \mathfrak{P}^{(-\mu-1)}(t_2', \ldots t_n') t_1^{-\mu-1} \right\}$$

Daraus ergeben sich die Gleichungen

$$F_1' + \mathfrak{P}^{(-2)}(t_2' .. t_n') = 0$$
$$2 F_2' + F_1' \mathfrak{P}^{(-2)}(t_2' \ldots t_n') + \mathfrak{P}^{(-3)}(t_2' .. t_n') = 0$$
$$3 F_3' + F_2' \mathfrak{P}^{(-2)}(t_2' .. t_n') + F_1' \mathfrak{P}^{(-3)}(t_2' .. t_n') + \mathfrak{P}^{(-4)}(t_2' \ldots t_n') = 0$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$m F_m' + F_{m-1}' \mathfrak{P}^{(-2)}(t_2' .. t_n') + F_{m-2}' \mathfrak{P}^{(-3)}(t_2' .. t_n') + \cdots + \mathfrak{P}^{(-m-1)}(t_2' .. t_n') = 0$$

Durch diese Gleichungen sind die Grössen $F_1', .. F_m'$ bestimmt. Substituirt man in den Ausdrücken derselben für $t_2' .. t_n'$ die unbestimmten Grössen $t_2, .. t_n$, bezeichnet die Potenzreihe von $t_2, .. t_n$, in welche F_μ' dadurch übergeht, mit

$$F_\mu(t_2, \ldots t_n)$$

und setzt

$$\varphi(t_1, t_2, .. t_n) = t_1^m + F_1(t_2, .. t_n) t_1^{m-1} + .. + F_m(t_2, .. t_n),$$

so ist durch das Vorstehende bewiesen, dass für jedes den angegebenen Bedingungen entsprechende Werthsystem $(t_1, t_2 \ldots t_n)$

$$\varphi_1(t_1, t_2 .. t_n) - \frac{\partial \log \varphi(t_1, t_2 .. t_n)}{\partial t_1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{P}^{(\nu)}(t_2, .. t_n) t_1^\nu$$

ist. Da aber die Reihe auf der Rechten dieser Gleichung keine negativen Potenzen von t_1 enthält, so convergirt sie für jedes den Bedingungen (C) genügende Werthsystem $(t_1, t_2 .. t_n)$, und zwar, wie aus ihrer Entstehungsweise hervorgeht, unabhängig von der Anordnung ihrer Glieder. Dasselbe gilt von den Reihen

$$F_1(t_2, .. t_n), \ldots F_m(t_2, .. t_n);$$
es gilt somit die vorstehende Gleichung für jedes den zuletzt angegebenen Bedingungen entsprechende Werthsystem $(t_1, .. t_n)$.

Nun hat man, wenn $\alpha > 1$ ist,

$$\frac{\partial \varphi_\alpha(t_1, .. t_n)}{\partial t_1} = \frac{\partial \varphi_1(t_1, .. t_n)}{\partial t_\alpha} = \frac{\partial^2 \log \varphi(t_1, .. t_n)}{\partial t_1 \partial t_\alpha}$$
$$+ \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{P}^{(\nu)}(t_2, .. t_n) t_1^\nu,$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \left\{ \varphi_\alpha(t_1, .. t_n) - \frac{\partial \log \varphi(t_1, .. t_n)}{\partial t_\alpha} \right\} =$$
$$\frac{\partial}{\partial t_1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \frac{t_1^{\nu+1}}{\nu+1} \frac{\partial \mathfrak{P}^{(\nu)}(t_2, .. t_n)}{\partial t_\alpha} \right\}.$$

Es lassen sich aber, wenn man $t_1, t_2, .. t_n$ wieder den Bedingungen (A) unterwirft,

$$\varphi_\alpha(t_1, .. t_n) \text{ und } \frac{\partial \log \varphi(t_1, .. t_n)}{\partial t_\alpha}$$

in Reihen von derselben Form, wie die im Vorgehenden für $\varphi_1(t_1, .. t_n)$ angegebene entwickeln. Die vorstehende Gleichung lehrt nun, dass in der Differenz dieser beiden Reihen Glieder mit einer negativen Potenz von t_1 nicht vorkommen, und dass man

$$\varphi_\alpha(t_1, .. t_n) - \frac{\partial \log \varphi(t_1, .. t_n)}{\partial t_\alpha} = \mathfrak{P}_\alpha^{(0)}(t_2, .. t_n) - \varphi_\alpha^{(0)}(t_2, .. t_n)$$
$$+ \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t_1^{\nu+1}}{\nu+1} \frac{\partial \mathfrak{P}^{(\nu)}(t_2, .. t_n)}{\partial t_\alpha}$$

hat, wo $\mathfrak{P}_\alpha^{(0)}(t_2, .. t_n)$ die Summe der von t_1 unabhängigen Glieder der eben erwähnten Ent-

wicklung von $\psi_\alpha(t_1, .. t_n)$ bezeichnet und $\psi_\alpha^{(0)}(t_2, .. t_n)$ dieselbe Bedeutung für die Function $\frac{\partial \log \varphi(t_1, .. t_n)}{\partial t_\alpha}$ hat. Aus der Form der Ausdrücke auf beiden Seiten dieser Gleichung ergiebt sich dann wieder, dass die Gleichung für jedes den Bedingungen (C) entsprechende Werthsystem $(t_1, t_2 .. t_n)$ gilt.

Damit ist bewiesen, dass sich

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \psi_\alpha(t_1, .. t_n)\, dt_\alpha$$

auf die Form

$$d \log \varphi(t_1, .. t_n) + \sum_{\alpha=1}^{n} \mathfrak{P}(t_1, .. t_n)_\alpha\, dt_\alpha$$

bringen lässt. Der Ausdruck unter dem Summenzeichen genügt dann wieder den Integrabilitätsbedingungen und kann nach dem zuerst betrachteten Falle in der Form

$$d \log . \mathfrak{P}(t_1, .. t_n)$$

dargestellt werden, wobei man $\mathfrak{P}(0, ..) = 1$ annehmen kann. Folglich ist, wenn man, unter C eine von Null verschiedene, im Übrigen willkürlich anzunehmende Constante verstehend,

$$\psi(t_1, .. t_n) = C\varphi(t_1, .. t_n)\, \mathfrak{P}(t_1, .. t_n)$$

setzt,

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \psi_\alpha(t_1, .. t_n)\, dt_\alpha = d \log \psi(t_1, .. t_n)$$

Drückt man nunmehr $t_1, .. t_n$ durch $x_1, .. x_n$ aus und setzt

$$\psi(t_1, .. t_n) = f(x_1, .. x_n),$$

so ergiebt sich

$$\sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha(x_1, \ldots x_n)\, dx_\alpha = d \log f(x_1, \ldots x_n)$$

Diese Gleichung gilt nun ihrer Herleitung zufolge für alle einer gewissen Umgebung der Stelle $(0, \ldots 0)$ angehörigen Werthsysteme $(x_1, \ldots x_n)$. Etwas Bestimmteres über den Convergenzbezirk der Reihe für $f(x_1, \ldots x_n)$ läßt sich durch die gegebene Deduction nicht ermitteln, weil bei derselben nur vorausgesetzt ist, dass die Functionen $f_\alpha(x_1, \ldots x_n)$ innerhalb einer begrenzten Umgebung der Stelle $(0, \ldots 0)$ überall eindeutig definirt seien und sich wie rationale Functionen verhalten. Gleichwohl reicht der in der vorstehenden Gleichung ausgesprochene Satz aus, um für den Fall, wo die Functionen $f_\alpha(x_1, \ldots x_n)$ sich an allen im Endlichen des Größengebietes $(x_1, \ldots x_n)$ liegenden Stellen wie rationale Functionen verhalten, das oben ausgesprochene Theorem zu beweisen.

Es sei $(a_1, \ldots a_n)$ ein System bestimmter, endlicher Werthe von $x_1, \ldots x_n$, und man nehme an, es convergire die auf die beschriebene Weise hergeleitete Reihe $f(x_1, \ldots x_n)$ (in der wir uns jetzt für die Constante C einen bestimmten Werth gesetzt denken) für jedes den Bedingungen

$$|x_1| < |a_1|, \quad \ldots \quad |x_n| < |a_n|$$

genügende Werthsystem $(x_1, \ldots x_n)$. – Ferner sei $(a'_1, \ldots a'_n)$ irgend ein bestimmtes Werthsystem, das den Bedingungen

$$|a'_1| = |a_1|, \ldots |a'_n| = |a_n|$$

gemäß, im Übrigen aber beliebig angenommen ist. Dann kann man innerhalb einer bestimmten Umgebung der Stelle $(a'_1, \ldots a'_n)$

$$f_\alpha(x_1, \ldots x_n) \text{ in der Form } \frac{\mathfrak{P}^{(1)}_\alpha(x_1 - a'_1, \ldots x_n - a'_n)}{\mathfrak{P}^{(0)}_\alpha(x_1 - a'_1, \ldots x_n - a'_n)}$$

darstellen und nach dem Vorhergehenden eine Reihe

$$\mathfrak{P}(x_1 - a'_1, \ldots x_n - a'_n)$$

herleiten, welche der Gleichung

$$d \log . \mathfrak{P}(x_1 - a'_1, \ldots x_n - a'_n) = \sum_\alpha \frac{\mathfrak{P}^{(1)}_\alpha(x_1 - a'_1, \ldots x_n - a'_n)}{\mathfrak{P}^{(0)}_\alpha(x_1 - a'_1, \ldots x_n - a'_n)} dx_\alpha$$

genügt. Diese Reihe möge convergiren an allen Stellen, für die

$$|x_1 - a'_1| < \delta, \ldots |x_n - a'_n| < \delta$$

ist, wo δ eine positive Größe bedeutet. Unter diesen Stellen giebt es nun auch solche – und zwar bilden dieselben ein $2n$-fach ausgedehntes Continuum –, welche zugleich den Bedingungen

$$|x_1| < |a_1|, \ldots |x_n| < |a_n|$$

genügen. Innerhalb des Bereiches dieser Stellen hat man also

$$d \log . \mathfrak{P}(x_1 - a'_1, \ldots x_n - a'_n) = \sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha(x_1, \ldots x_n)\, dx_\alpha$$

$$d \log . f(x_1, \ldots x_n) = \sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha(x_1, \ldots x_n)\, dx_\alpha$$

$$\frac{d\,\mathfrak{F}(x_1-a_1',\dots x_n-a_n')}{\mathfrak{F}(x_1-a_1',\dots x_n-a_n')} = \frac{d f(x_1,\dots x_n)}{f(x_1,\dots x_n)},$$

woraus sich, da die Functionen $f(x_1,\dots x_n)$, $\mathfrak{F}(x_1-a_1',\dots x_n-a_n')$ innerhalb des in Rede stehenden Bereichs an allen Stellen sich regulär verhalten

$$f(x_1,\dots x_n) = C'\mathfrak{F}(x_1-a_1',\dots x_n-a_n')$$

ergiebt, wo C' eine von $x_1,\dots x_n$ unabhängige Grösse bedeutet. Da dies für jedes den angegebenen Bedingungen entsprechende Werthsystem $(a_1',\dots a_n')$ gilt, so folgt daraus (nach einem der Sätze, welche in der Functionentheorie in Betreff der Convergenzbedingungen von Potenzreihen entwickelt werden), dass die Reihe auch noch convergirt für jedes den Bedingungen

$$|x_1| < |a_1| + \delta, \dots |x_n| < |a_n| + \delta$$

genügende Werthsystem $(x_1,\dots x_n)$. Daraus ergiebt sich sofort, dass die Reihe $f(x_1,\dots x_n)$ für jedes System endlicher Werthe von $x_1,\dots x_n$ convergirt und die Gleichung

$$\sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha(x_1,\dots x_n)\,dx_\alpha = d\log. f(x_1,\dots x_n)$$

befriedigt.

Man sieht zugleich, wie sich die in $f(x_1,\dots x_n)$ vorkommende Constante C so bestimmen lässt, dass einer der Coefficienten der Reihe, welcher nicht nothwendig bei jedem Werth

von C gleich Null ist, einen vorgeschriebenen Werth erhält.

Es bedarf kaum der Erinnerung, dass in einem gegebenen Falle die Entwicklung der Reihe $f(x_1, .. x_n)$ nicht nothwendig auf dem beschriebenen Wege bewerkstelligt zu werden braucht. Vielmehr kann man, nachdem einmal durch das Vorstehende die Form und der Convergenzbezirk der Reihe festgestellt worden sind, jedes zur Bestimmung ihrer Coefficienten führende Verfahren ohne Verstoss gegen die Strenge der Herleitung anwenden.

5.

An das im Vorstehenden entwickelte Theorem schliesst sich nun ein andres an, durch welches in manchen Fällen für eine eindeutige Function $f(x_1, .. x_n)$, welche an allen im Endlichen des Grössengebietes $(x_1, .. x_n)$ liegenden Stellen sich wie eine rationale Function verhält, der Nachweis geführt werden kann, dass sie als Quotient zweier (transcendenten oder rationalen) ganzen Functionen von $x_1, .. x_n$ darstellbar ist und zwar in der Art, dass nur an denjenigen Stellen, wo $f(x_1, .. x_n)$ keinen bestimmten Werth hat, der Dividend sowohl als der Divisor verschwindet.

Angenommen, es sei eine bestimmte Function $f(x_1, \ldots x_n)$ in der angegebenen Weise als Quotient zweier ganzen Functionen $g_1(x_1, \ldots x_n)$, $g_0(x_1, \ldots x_n)$ ausgedrückt, so hat man, wenn

$$\frac{\partial \log g_0(x_1, \ldots x_n)}{\partial x_\alpha} = f_\alpha^{(0)}(x_1, \ldots x_n)$$

$$\frac{\partial \log g_1(x_1, \ldots x_n)}{\partial x_\alpha} = f_\alpha^{(1)}(x_1, \ldots x_n)$$

gesetzt wird,

$$d \log f(x_1, \ldots x_n) = \sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha^{(1)}(x_1, \ldots x_n)\, dx_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha^{(0)}(x_1, \ldots x_n)\, dx_\alpha,$$

und es besitzen die Functionen $f_\alpha^{(0)}, f_\alpha^{(1)}$ folgende Eigenschaften:

1, Sie sind alle eindeutige Functionen von $x_1, \ldots x_n$, welche sich im Endlichen überall wie rationale Functionen verhalten.

2, Die Differentialausdrücke

$$\sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha^{(1)}(x_1, \ldots x_n)\, dx_\alpha, \quad \sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha^{(0)}(x_1, \ldots x_n)\, dx_\alpha$$

genügen beide den Integrabilitätsbedingungen.

3, Jede im Endlichen gelegene singuläre Stelle einer der Functionen $f_\alpha^{(0)}(x_1, \ldots x_n)$ ist zugleich eine singuläre Stelle der Function $f(x_1, \ldots x_n)$; jede im Endlichen gelegene singuläre Stelle einer der Functionen $f_\alpha^{(1)}(x_1, \ldots x_n)$ ist entweder eine Null-Stelle von

$f(x_1, .. x_n)$ oder eine derjenigen singulären Stellen dieser Function, an denen sie keinen bestimmten Werth hat.

Dies Theorem – dessen Beweis auf der Hand liegt – lässt sich folgendermaßen umkehren.

Angenommen, man wisse von einer irgendwie definirten Function $f(x_1, .. x_n)$ dass sie eine eindeutige Function der hier betrachteten Art sei, und es gelinge, das Differential

$$d \log f(x_1, .. x_n)$$

in der Form

$$\sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha^{(1)}(x_1, .. x_n) dx_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha^{(0)}(x_1, .. x_n) dx_\alpha$$

dergestalt auszudrücken, dass die Functionen $f_\alpha^{(0)}$, $f_\alpha^{(1)}$ die im Vorstehenden (unter 1, 2, 3) angegebenen Eigenschaften besitzen, so sind diese Functionen auch so beschaffen, dass sich auf die in No. 4 gelehrte Weise zwei ganze Functionen $g_0(x_1, .. x_n)$, $g_1(x_1, .. x_n)$ bestimmen lassen, welche die Gleichungen

$$A) \quad \begin{aligned} d \log g_0(x_1, .. x_n) &= \sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha^{(0)}(x_1, .. x_n) dx_\alpha \\ d \log g_1(x_1, .. x_n) &= \sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha^{(1)}(x_1, .. x_n) dx_\alpha \end{aligned}$$

befriedigen. Dann ist

$$B) \quad f(x_1, .. x_n) = C \frac{g_1(x_1, .. x_n)}{g_0(x_1, .. x_n)}$$

wo C eine von $x_1, .. x_n$ unabhängige Größe bezeichnet, und es verschwinden g_0, g_1 gleichzeitig nur an solchen Stellen $(x_1, .. x_n)$, wo $f(x_1, .. x_n)$

keinen bestimmten Werth hat.

Es sei $(a_1, .. a_n)$ irgendein System endlicher Werthe der Grössen $x_1, .. x_n$, so giebt es — nach No. 2 — eine gewisse Umgebung (L) der Stelle $(a_1, .. a_n)$, innerhalb welcher jede der Functionen $f, f_1^{(0)}, .. f_n^{(0)}, f_1^{(1)}, .. f_n^{(1)}$ sich als Quotient zweier Potenzreihen von $x_1 - a_1, .. x_n - a_n$ in der Art darstellen lässt, dass der Dividend u. der Divisor nur an solchen Stellen $(x_1, .. x_n)$, wo die betreffende Function keinen bestimmten Werth hat, gleichzeitig verschwinden. Bezeichnet man für $f, f_\alpha^{(1)}, f_\alpha^{(0)}$ die Dividenden bez. mit p, p'_α, q'_α und die Divisoren bez. mit q, p_α, q_α, so hat man

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \left(\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial x_\alpha} - \frac{p'_\alpha}{p_\alpha}\right) d x_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial x_\alpha} - \frac{q'_\alpha}{q_\alpha}\right) d x_\alpha ,$$

woraus sich, da die Veränderlichen $x_1, .. x_n$ unabhängig von einander sind,

$$\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial x_\alpha} - \frac{p'_\alpha}{p_\alpha} = \frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial x_\alpha} - \frac{q'_\alpha}{q_\alpha} \qquad (\alpha = 1\ 2\ ..\ n)$$

ergiebt.

Der Voraussetzung (3) nach kann q_α innerhalb des Bereiches (L) nur an solchen Stellen $(x_1, .. x_n)$ verschwinden, die zugleich singuläre Stellen der Function $\frac{p}{q}$ sind, für welche also $q = 0$ ist. Ebenso kann p_α nur an solchen Stellen verschwinden, an denen $p = 0$ ist. Daraus kann man schliessen, dass die Fun-

tion
$$\frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial x_\alpha} - \frac{q'_\alpha}{q_\alpha}$$
sich innerhalb ($\mathfrak{L}$) regulär verhält. Denn wäre dies nicht der Fall, so hätte sie (nach № 3) innerhalb ($\mathfrak{L}$) unendlich viele singuläre Stellen, und unter diesen gäbe es unzählige, an denen $q=0$ wäre, p aber, und somit auch p_α, einen von Null verschiedenen Werth besäße, was der Gleichung:
$$\frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial x_\alpha} - \frac{q'_\alpha}{q_\alpha} = \frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial x_\alpha} - \frac{p'_\alpha}{p_\alpha}$$
widersprechen würde. Man kann also für die dem Bereiche ($\mathfrak{L}$) angehörigen Werthsysteme $(x_1, .. x_n)$
$$\frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial x_\alpha} - \frac{q'_\alpha}{q_\alpha} = \mathfrak{P}'_\alpha(x-a_1, .. x_n - a_n)$$
setzen und hat dann
$$\sum_{\alpha=1}^{n} f^{(0)}_\alpha(x_1, .. x_n)\,dx_\alpha = d\log q - \sum_{\alpha=1}^{n} \mathfrak{P}'_\alpha(x_1-a_1, .. x_n-a_n)\,dx_\alpha$$
$$\sum_{\alpha=1}^{n} f^{(1)}_\alpha(x_1, .. x_n)\,dx_\alpha = d\log p - \sum_{\alpha=1}^{n} \mathfrak{P}'_\alpha(x_1-a_1, .. x_n-a_n)\,dx_\alpha$$
Der Differentialausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichungen genügt nun den Integrabilitätsbedingungen; man kann ihn daher in der Form
$$d\,\mathfrak{P}(x_1-a_1, \ldots x_n - a_n)$$
darstellen und erhält dann
$$\sum_{\alpha=1}^{n} f^{(0)}_\alpha(x_1, .. x_n)\,dx_\alpha = d\log\left\{q\cdot e^{-\mathfrak{P}(x_1-a_1, .. x_n-a_n)}\right\} = d\log \mathfrak{P}^{(0)}(x_1-a_1, .. x_n-a_n)$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha^{(1)}(x_1, .. x_n)\, dx_\alpha = d \log\left\{p \cdot e^{-\mathfrak{P}(x_1-a_1, .. x_n-a_n)}\right\} = d \log \mathfrak{P}^{(1)}(x_1-a_1, .. x_n-a_n)$$

Es sind also die Functionen $f_\alpha^{(0)}(x_1, .. x_n)$, $f_\alpha^{(1)}(x_1, .. x_n)$ in der That so beschaffen, dass man (nach No. 4) zwei ganze Functionen $g_0(x_1, .. x_n)$, $g_1(x_1, .. x_n)$ bestimmen kann, für welche – bei gehöriger Bestimmung der Constante C – die vorstehenden Gleichungen (A, B) gelten. In der Umgebung jeder bestimmten Stelle $(a_1, .. a_n)$ ist dann

$$g_0(x_1, .. x_n) = C_1\, q\, e^{-\mathfrak{P}(x_1-a_1, .. x_n-a_n)}$$
$$g_1(x_1, .. x_n) = C_2\, p\, e^{-\mathfrak{P}(x_1-a_1, .. x_n-a_n)}$$

wo C_1, C_2 Constanten bezeichnen; es verschwinden daher g_0, g_1 gleichzeitig an der Stelle $(a_1, .. a_n)$ nur dann, wenn auch p, q an derselben beide verschwinden, $f(x_1, .. x_n)$ also für das Werthsystem $(x_1 = a_1, .. x_n = a_n)$ keinen bestimmten Werth besitzt; w. z. b. w.

Anmerkungen.

1) Es ist vorausgesetzt worden, man wisse von der Function $f(x_1, .. x_n)$, dass sie eine eindeutige Function sei und im Endlichen sich überall wie eine rationale Function verhalte. Ist dies nicht bekannt, vielmehr die Aufgabe gestellt, die Function so zu bestimmen, dass sie der Differentialgleichung

$$d\log. f(x_1, .. x_n) = \sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha^{(1)}(x_1, .. x_n)\, dx_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha^{(0)}(x_1, .. x_n)\, dx_\alpha$$

genüge, so hat man zur Lösung dieser Aufgabe kein andres Mittel, als zu untersuchen, ob jeder der beiden Differentialausdrücke auf der Rechten der Gleichung die in N:4 von dem dort betrachteten Ausdruck

$$\sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha(x_1, .. x_n)\, dx_\alpha$$

vorausgesetzte Beschaffenheit habe, und im Falle, dass sich dies bestätigt und somit feststeht, dass $f(x_1, .. x_n)$ in der Form

$$\frac{g_1(x_1, .. x_n)}{g(x_1, .. x_n)}$$

dargestellt werden kann, sich zu vergewissern, ob die Functionen $f_\alpha^{(0)}$, $f_\alpha^{(1)}$ auch der oben (unter 3) angegebenen Bedingung entsprechen.

2. Das im Vorstehenden entwickelte Theorem kann ohne Schwierigkeit folgendermaßen verallgemeinert werden:

Es sei von einer irgendwie definirten Function $f(x_1, .. x_n)$ bekannt, dass sie sich im Endlichen überall wie eine rationale Function verhalte, und es lasse sich $d^m \log f(x_1, .. x_n)$ in der Form

$$d^m \log f(x_1, .. x_n) = \sum_\alpha f^{(1)}_{\alpha_1, .. \alpha_m}(x_1, .. x_n)\, dx_{\alpha_1} .. dx_{\alpha_m} - \sum_\alpha f^{(0)}_{\alpha_1, .. \alpha_m}(x_1, .. x_n)\, dx_{\alpha_1} .. dx_{\alpha_m}$$
$$(\alpha_1, .. \alpha_m = 1\ 2 .. n)$$

dergestalt ausdrücken, dass jeder der beiden Dif-

ferentialausdrücke auf der Rechten der Gleichung den Integrabilitätsbedingungen genüge, und die Functionen $f^{(0)}_{\alpha_1,\dots\alpha_m}$, $f^{(1)}_{\alpha_1,\dots\alpha_m}$ die im Vorstehenden unter (1, 3) angegebene Beschaffenheit besitzen, so ist $f(x_1,\dots x_n)$ in der Form

$$\frac{g_1(x_1,\dots x_n)}{g_0(x_1,\dots x_n)}$$

darstellbar, wo g_0, g_1 ganze Functionen von $x_1,\dots x_n$ sind, welche nur an solchen Stellen $(x_1,\dots x_n)$, wo $f(x_1,\dots x_n)$ keinen bestimmten Werth hat, gleichzeitig verschwinden.

Der Beweis dieses Satzes ist dem für den Fall wo $m=1$ ist, durchgeführten ganz analog, es braucht dabei nur folgender, leicht abzuleitender Hilfssatz vorausgesetzt zu werden:

Genügt ein Differentialausdruck

$$\sum_\alpha \mathfrak{P}_{\alpha_1,\dots\alpha_m}(x_1-a_1,\dots x_n-a_n)\,dx_{\alpha_1}\dots dx_{\alpha_m}$$

den Integrabilitätsbedingungen, so kann er auf die Form

$$d^m\mathfrak{P}(x_1-a_1,\dots x_n-a_n)$$

gebracht werden.

3. Auch das in № 4 bewiesene Theorem kann folgendermaßen verallgemeinert werden:

Ist ein den Integrabilitätsbedingungen genügender Differentialausdruck

$$\sum_\alpha f_{\alpha_1,\dots\alpha_m}(x_1,\dots x_n)\,dx_{\alpha_1}\dots dx_{\alpha_m} \qquad (\alpha_1,\dots\alpha_m=1$$

gegeben, in welchem die Functionen $f_{\alpha_1,\dots\alpha_m}(x_1,\dots x_n)$ eindeutige Functionen der hier betrachteten Art sind und lässt sich zeigen, dass derselbe, wenn für $x_1,\dots x_n$ lineare Functionen einer Veränderlichen gesetzt werden – welche nur der in No. 4 für den Fall, wo $m=1$ ist, angegebenen Bedingung unterworfen sind – für hinlänglich kleine Werthe von t stets die Gestalt

$$\mu\, d^m \log t + \mathfrak{P}(t)\, dt^m$$

erhält, wo μ entweder gleich 0 oder eine <u>positive</u> ganze Zahl ist, so ist jede der Differentialgleichung

$$d^m \log f(x_1,\dots x_n) = \sum_\alpha f_{\alpha_1,\dots\alpha_m}(x_1,\dots x_n)\, dx_{\alpha_1}\dots dx_{\alpha_m}$$

genügende Function $f(x_1,\dots x_n)$ eine ganze Function von $x_1,\dots x_n$; und ist eine solche Function – $f_0(x_1,\dots x_n)$ – bestimmt, so erhält man den allgemeinsten Ausdruck von $f(x_1,\dots x_n)$, wenn man

$$f(x_1,\dots x_n) = f_0(x_1,\dots x_n)\, e^{G(x_1,\dots x_n)}$$

setzt und für $G(x_1,\dots x_n)$ eine ganze rationale Function $m-1^{\text{ten}}$ Grades von $x_1,\dots x_n$ mit willkürlichen Coefficienten nimmt.

Um diesen Satz beweisen zu können, hat man zunächst zu untersuchen, unter welchen Bedingungen ein gegebener Ausdruck:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha(x_1, .. x_n)\, dx_\alpha,$$

in welchem die Functionen $f_\alpha(x_1, .. x_n)$ eindeutige Functionen der hier betrachteten Art sind, das Differential einer ebenfalls eindeutigen Function ist – eine Frage, welche sich mit Hilfe der Ergebnisse der vorhergehenden Untersuchungen ohne Schwierigkeit erledigen lässt, auf die ich aber hier, wo es sich hauptsächlich um eine Zusammenstellung solcher Sätze handelt, die in meiner Vorlesung über die Abelschen Functionen als Hilfssätze gebraucht werden, nicht eingehe.

6.

Über n-fach periodische ganze Functionen von n Veränderlichen.

Eine ganze Function $f(u_1, .. u_n)$ der n Veränderlichen $u_1, .. u_n$ sei n-fach periodisch; d.h. es soll n Systeme von je n Constanten:

$$\begin{array}{cccc} 2\omega_{11}, & 2\omega_{12}, & \dots & 2\omega_{1n} \\ 2\omega_{21}, & 2\omega_{22}, & \dots & 2\omega_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2\omega_{n1}, & 2\omega_{n2}, & \dots & 2\omega_{nn} \end{array}$$

geben, für welche bei beliebigen Werthen von $u_1, .. u_n$ die n Gleichungen

$$f(u_1 + 2\omega_{1\beta}, \ldots u_n + 2\omega_{n\beta}) = f(u_1, \ldots u_n) \qquad (\beta = 1\,2 \ldots n)$$

gelten, wobei vorausgesetzt werde, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} \omega_{11}, & \ldots & \omega_{1n} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \omega_{n1}, & \ldots & \omega_{nn} \end{vmatrix}$$

nicht gleich Null sei.

Führt man statt $u_1, \ldots u_n$ andere Veränderliche $v_1, \ldots v_n$ ein mittelst der Gleichungen

$$u_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} 2\omega_{\alpha\beta}\, v_\beta \qquad (\alpha = 1 \ldots n)$$

und bezeichnet mit $\varphi(v_1, v_2 \ldots v_n)$ die Function, in welche $f(u_1, \ldots u_n)$ durch diese Substitution übergeht, so hat man

$$\varphi(v_1 + 1, v_2, \ldots v_n) = \varphi(v_1, v_2, \ldots v_n)$$
$$\varphi(v_1, v_2 + 1, \ldots v_n) = \varphi(v_1, v_2, \ldots v_n)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi(v_1, v_2, \ldots v_n + 1) = \varphi(v_1, v_2, \ldots v_n),$$

aus welchen Gleichungen sich die allgemeinere

$$\varphi(v_1 + m_1, v_2 + m_2, \ldots v_n + m_n) = \varphi(v_1, v_2, \ldots v_n)$$

ergiebt, wo $m_1, m_2, \ldots m_n$ beliebige ganze Zahlen bedeuten.

Es soll nun bewiesen werden, dass sich $\varphi(v_1, v_2, \ldots v_n)$ durch eine beständig convergirende Reihe von der Form:

$$\sum_\nu C_{\nu_1, \nu_2, .. \nu_n} e^{2(\nu_1 v_1 + \nu_2 v_2 + .. + \nu_n v_n)\pi i}$$

$$(\nu_1, \nu_2, .. \nu_n = -\infty .. +\infty)$$

darstellen lässt, wo die $C_{\nu_1, \nu_2, .. \nu_n}$ von $v_1, v_2 .. v_n$ unabhängige Grössen sind.

Es ist leicht, diesen Satz aus dem auf Functionen mehrerer Veränderlichen ausgedehnten Fourier'schen Theoreme abzuleiten. Man setzt zu dem Ende, unter $s_1, .. s_n, t_1, .. t_n$ reelle Grössen verstehend,

$$v_\alpha = t_\alpha + s_\alpha i,$$

so lässt sich $\varphi(t_1 + s_1 i, .. t_n + s_n i)$ als Function von $t_1, .. t_n$ betrachtet, in der Form

$$\sum_\nu C'_{\nu_1, .. \nu_n} e^{2(\nu_1 t_1 + .. \nu_n t_n)\pi i} \qquad (\nu_1, .. \nu_n = -\infty .. +\infty)$$

ausdrücken, wenn man

$$C'_{\nu_1, .. \nu_n} = \int_0^1 .. \int_0^1 \varphi(t_1 + s_1 i, .. t_n + s_n i) e^{-2(\nu_1 t_1 + .. + \nu_n t_n)\pi i} dt_1 ... dt_n$$

nimmt. Man beweist dann leicht, dass die partiellen Ableitungen der als Function von $s_1, .. s_n$ betrachteten Grösse

$$C'_{\nu_1, .. \nu_n} e^{2(\nu_1 s_1 + .. + \nu_n s_n)\pi}$$

bei der vorausgesetzten Beschaffenheit der Function φ sämmtlich gleich Null sind, diese Grösse also einen von $s_1, .. s_n$ unabhängigen Werth hat, woraus sich der angegebene Ausdruck von $\varphi(v_1, .. v_n)$ und die Be-

stimmung von $C_{\nu_1, \ldots \nu_n}$, nämlich

$$C_{\nu_1, \ldots \nu_n} = \int_0^1 \ldots \int_0^1 \varphi(t_1, \ldots t_n)\, e^{-2(\nu_1 t_1 + \ldots \nu_n t_n)\pi i} dt_1 \ldots dt_n$$

ergiebt.

Die Schwierigkeiten, mit denen eine strenge Begründung des Fourier'schen Theorems für beliebige Functionen reeller Veränderlichen verknüpft ist, fallen für die Function $\varphi(t_1 + s_1 i, \ldots t_n + s_n i)$ fort, indem deren Ableitungen stetige Functionen von $t_1, \ldots t_n$ sind.

Es läßt sich indess der in Rede stehende Ausdruck von $\varphi(v_1, \ldots v_n)$ auch mit Hülfe der Fundamentalsätze der Theorie der gewöhnlichen Potenzreihen ableiten. Dies soll hier ausgeführt werden.

Es sei

$$g(v, x_1, \ldots x_r)$$

eine ganze Function der $r+1$ von einander unabhängigen Veränderlichen $v, x_1, \ldots x_r$ und besitze in Beziehung auf die Veränderliche v die Periode 1, so dass, wenn m eine beliebige ganze Zahl ist, die Gleichg.

$$g(v+m, x_1, \ldots x_r) = g(v, x_1, \ldots x_r)$$

besteht. Setzt man dann

$$g_0(v, x_1, \ldots x_r) = \tfrac{1}{2}\, g(v, x_1, \ldots x_r) + \tfrac{1}{2}\, g(-v, x_1, \ldots x_r),$$

$$g_1(v, x_1, \ldots x_r) = \frac{\tfrac{1}{2}\, g(v, x_1, \ldots x_r) - \tfrac{1}{2}\, g(-v, x_1, \ldots x_r)}{\sin 2v\pi}$$

so ist nicht nur g_0, sondern auch g_1 eine ganze Function von $v, x_1, .. x_r$. Denn der Nenner von g_1 verschwindet nur, wenn $v = \frac{m}{2}$ und m eine ganze Zahl ist; setzt man aber $v = \frac{m}{2} + h$, so ist

$$\sin 2\left(\frac{m}{2}+h\right)\pi = \pm \sin 2h\pi$$

$$g\left(-\frac{m}{2}-h, x_1, \dots x_r\right) = g\left(\frac{m}{2}-h, x_1, .. x_r\right), \text{ also}$$

$$g\left(\frac{m}{2}+h, x_1, \dots x_r\right) - g\left(\frac{m}{2}-h, x_1, .. x_r\right) = h\mathfrak{F}(h, x_1, .. x_r)$$

und es hat somit $g_1(v, x_1, .. x_r)$ auch für $v = \frac{m}{2}$ einen bestimmten endlichen Werth.

Jetzt sei s eine neue unbeschränkt veränderliche Grösse, und es werde eine Function $G_0(s, x_1, .. x_r)$ folgendermaßen definirt: Jedem endlichen Werth von s ordne man einen die Gleichung

$$s = \cos 2v\pi$$

befriedigenden Werth von v zu und nehme dann

$$G_0(s, x_1, .. x_r) = g_0(v, x_1, .. x_r),$$

so hat $G_0(s, x_1, .. x_r)$ für jedes System endlicher Werthe von $v, x_1, .. x_r$ einen bestimmten u. ebenfalls endlichen Werth. Denn es sei v' irgend einer derjenigen Werthe von v, welche für einen gegebenen Werth s' von s der Gleichung $s' = \cos 2v\pi$ genügen, so werden alle übrigen durch die Formel

$$\pm v' + m$$

geliefert, wo m eine ganze Zahl bedeutet; für alle diese Werthe von v hat aber $g_0(v, x_1, .. x_r)$ denselben Werth. Nimmt man ferner s hinlänglich nahe bei s' an und setzt $h = 2\pi(v - v')$, so erhält man aus der Gleichung

$$s - s' = -\sin 2v'\pi \cdot \left(h - \frac{h^3}{3!} + ..\right) - \cos 2v'\pi \left(\frac{h^2}{2!} - \frac{h^4}{4!} + ..\right)$$

falls $\sin 2v'\pi$ nicht gleich Null ist, einen dieselbe befriedigenden Werth von $v - v'$, und in dem Falle, wo $\sin 2v'\pi = 0$ ist, einen Werth von $(v - v')^2$ in der Form einer Potenzreihe von $s - s'$ ausgedrückt. Da nun im letzteren Falle $v' = \frac{m}{2}$ und daher

$$g_0(v, x_1, .. x_r) = \frac{1}{2} g\left(\frac{m}{2} + (v - v'), x_1, .. x_r\right) + \frac{1}{2} g\left(-\frac{m}{2} - (v - v'), x_1, .. x_r\right)$$
$$= \frac{1}{2} g\left(\frac{m}{2} + (v - v'), x_1, .. x_r\right) + \frac{1}{2} g\left(\frac{m}{2} - (v - v'), x_1, .. x_r\right)$$

ist, also in der Entwicklung von $g_0(v, x_1, .. x_r)$ nach Potenzen von $v - v'$ nur gerade Potenzen dieser Größe vorkommen, so läßt sich in beiden Fällen $G_0(s, x_1, .. x_r)$ als Potenzreihe von $s - s'$, $x_1, .. x_r$ darstellen. Damit ist bewiesen, dass $G_0(s, x_1, .. x_r)$ eine <u>ganze</u> Function von $s, x_1, .. x_r$ ist, welche, wenn $s = \cos 2v\pi$ gesetzt wird, in $g_0(v, x_1, .. x_r)$ übergeht.

Ebenso wird gezeigt, dass eine ganze Function $G_1(s, x_1, .. x_r)$ existirt, welche, wenn $s = \cos 2v\pi$ gesetzt wird, in $g_1(v, x_1, .. x_r)$

Hiernach hat man

$$g(v, x_1, .. x_r) = G_0(\cos 2v\pi, x_1, .. x_r) + G_1(\cos 2v\pi, x_1, .. x_r) \sin 2v\pi$$

Wendet man nun diesen Satz auf die Function $\varphi(v_1, v_2, .. v_n)$ an, so kann man dieselbe zunächst auf die Form

$$G_0(\cos 2v_1\pi, v_2, .. v_n) + G_1(\cos 2v_1\pi, v_2, .. v_n) \sin 2v_1\pi$$

bringen. Die Functionen G_0, G_1 haben dann in Beziehung auf jedes Argument $v_2, .. v_n$ die Periode 1, und man erhält also (für $\varepsilon = 0, 1$):

$$G_\varepsilon(\cos 2v_1\pi, v_2, .. v_n) = G_{\varepsilon,0}(\cos 2v_1\pi, \cos 2v_2\pi, v_3 .. v_n)$$
$$+ G_{\varepsilon,1}(\cos 2v_1\pi, \cos 2v_2\pi, v_3 .. v_n) \sin 2v_2\pi$$

Dann haben die Functionen $G_{\varepsilon,0}$, $G_{\varepsilon,1}$ in Beziehung auf jedes der Argumente $v_3, .. v_n$ die Periode 1; man erhält also (für $\varepsilon = 0, 1$, $\varepsilon_1 = 0, 1$)

$$G_{\varepsilon,\varepsilon_1}(\cos 2v_1\pi, \cos 2v_2\pi, v_3 .. v_n) = G_{\varepsilon,\varepsilon_1,0}(\cos 2v_1\pi, \cos 2v_2\pi, \cos 2v_3\pi, v_4 .. v_n)$$
$$+ G_{\varepsilon,\varepsilon_1,1}(\cos 2v_1\pi, \cos 2v_2\pi, \cos 2v_3\pi, v_4 ... v_n) \sin 2v_3\pi$$

So fortfahrend kommt man zu dem Ergebniss, dass sich $\varphi(v_1, v_2 .. v_n)$ in der Form

$$\sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=1} \sum_{\varepsilon_1=0}^{\varepsilon_1=1} .. \sum_{\varepsilon_{n-1}=0}^{\varepsilon_{n-1}=1} G_{\varepsilon,\varepsilon_1,..\varepsilon_{n-1}}(\cos 2v_1\pi, \cos 2v_2\pi, .. \cos 2v_n\pi) \sin^\varepsilon 2v_1\pi \cdot \sin^{\varepsilon_1} 2v_2\pi ... \sin^{\varepsilon_{n-1}} 2v_n\pi$$

darstellen lässt, wo die Functionen $G_{\varepsilon,\varepsilon_1,..\varepsilon_{n-1}}$ sämmtlich ganze Functionen der Grössen $\cos 2v_1\pi$, $\cos 2v_2\pi$, .. $\cos 2v_n\pi$ sind.

Setzt man sodann

$$\cos 2v_\alpha\pi = \tfrac{1}{2} e^{2v_\alpha\pi i} + \tfrac{1}{2} e^{-2v_\alpha\pi i}, \quad \sin 2v_\alpha\pi = \tfrac{1}{2i} e^{2v_\alpha\pi i} - \tfrac{1}{2i} e^{-2v_\alpha\pi i}, \quad (\alpha = 1..n)$$

so kann der vorstehende Ausdruck in eine beständig convergirende Potenzreihe der $2n$ Grössen

$$e^{2v_1\pi i},\ e^{-2v_1\pi i},\ \dots\ e^{2v_n\pi i},\ e^{-2v_n\pi i}$$

verwandelt werden, sodass man

$$\varphi(v_1, v_2, .. v_n) = \sum A_{\lambda_1,\mu_1,..\lambda_n,\mu_n}\, e^{2((\lambda_1-\mu_1)v_1 + (\lambda_2-\mu_2)v_2 + \dots + (\lambda_n-\mu_n)v_n)\pi i} \quad (\lambda_1,\mu_1,..\lambda_n,\mu_n = 0..\infty)$$

erhält. Da diese Reihe gleichmässig convergirt, so kann man, wenn $\nu_1, \nu_2, .. \nu_n$ irgend n bestimmte ganze Zahlen sind, diejenigen Glieder der Reihe, in denen die Differenzen

$$\lambda_1-\mu_1,\ \lambda_2-\mu_2,\ \dots\ \lambda_n-\mu_n$$

bezüglich die Werthe

$$\nu_1,\quad \nu_2,\quad ..\quad \nu_n$$

haben, in *ein* Glied zusammenziehen, wodurch sich die oben angegebene, ebenfalls gleichmässig convergirende Reihe für $\varphi(v_1, v_2 .. v_n)$ ergiebt.

Drückt man sodann $v_1\, v_2 .. v_n$ durch die ursprünglichen Veränderlichen $u_1, u_2 .. u_n$ aus, so gelangt man zu einer Entwicklung von $f(u_1, u_2, .. u_n)$, in welcher jedes einzelne Glied dieselbe Periodicität wie die Function $f(u_1, .. u_n)$ selbst besitzt.

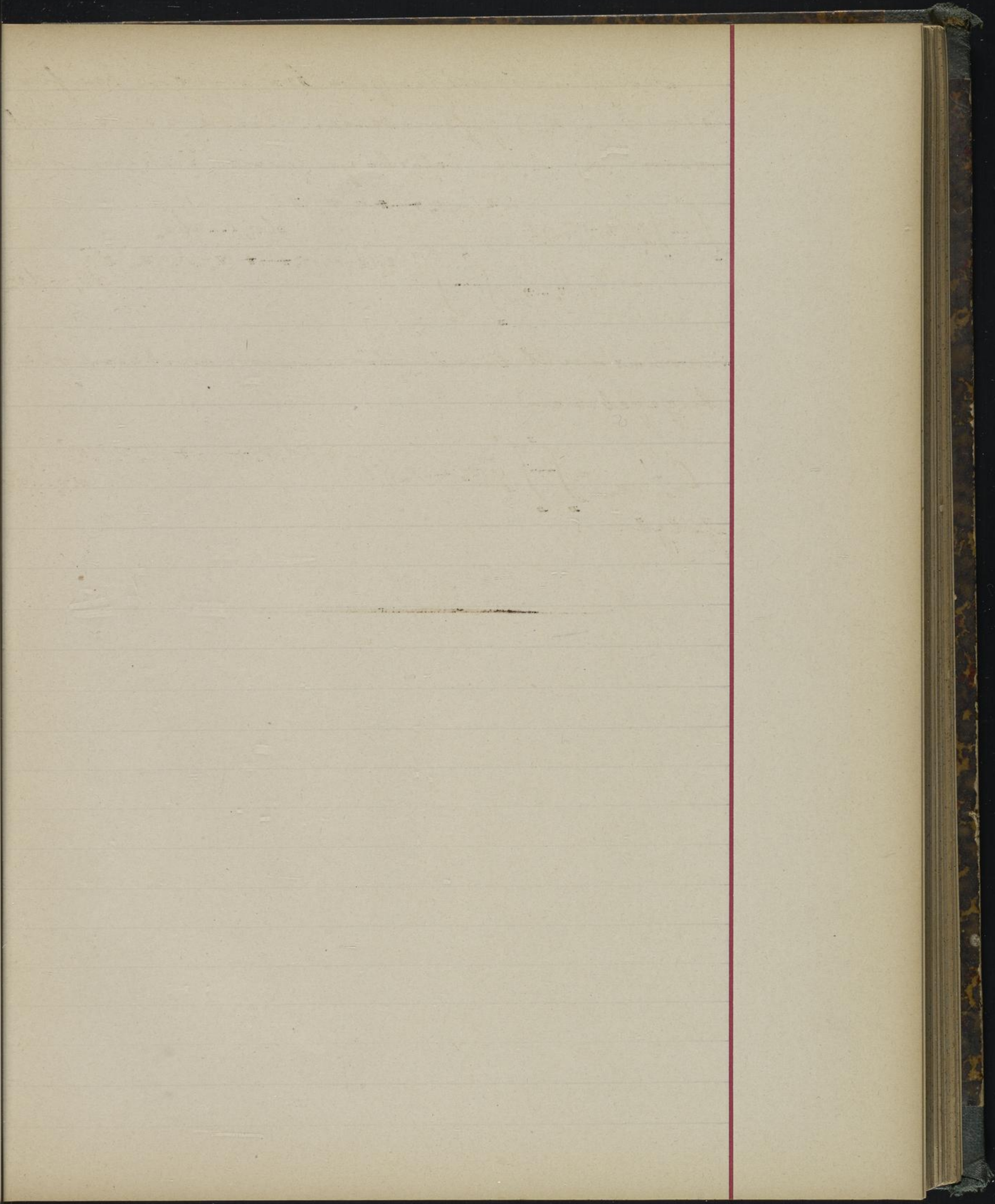
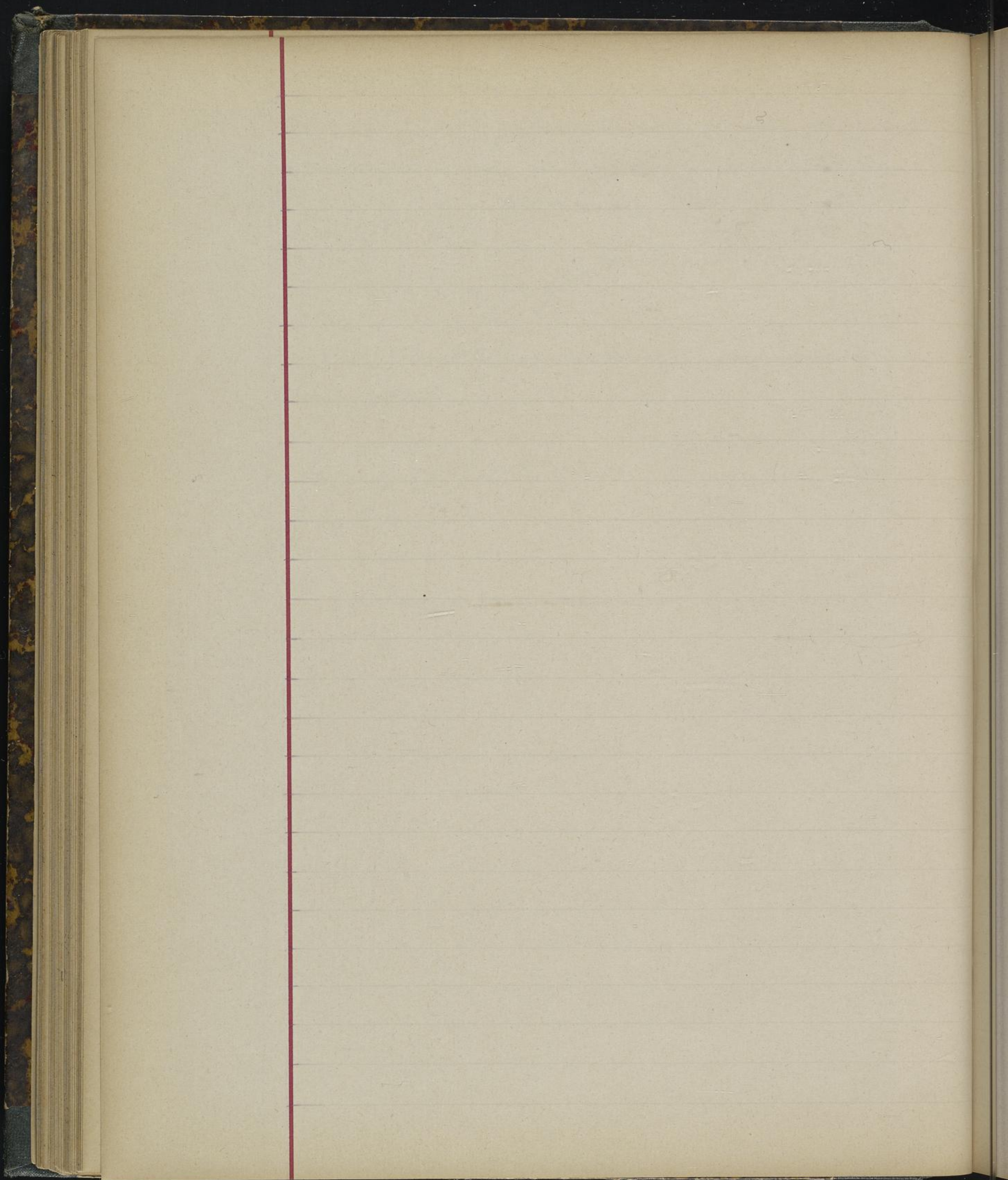
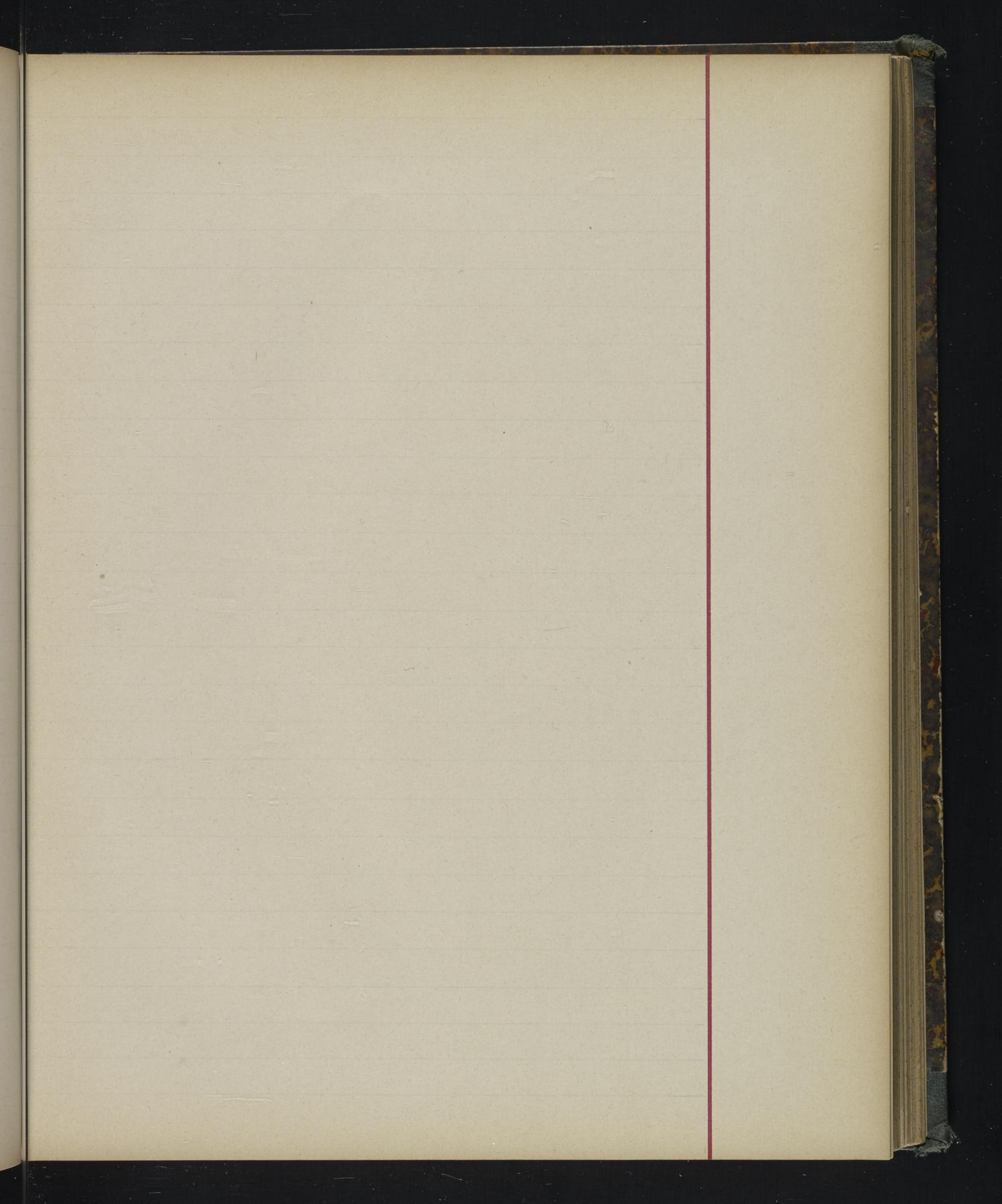
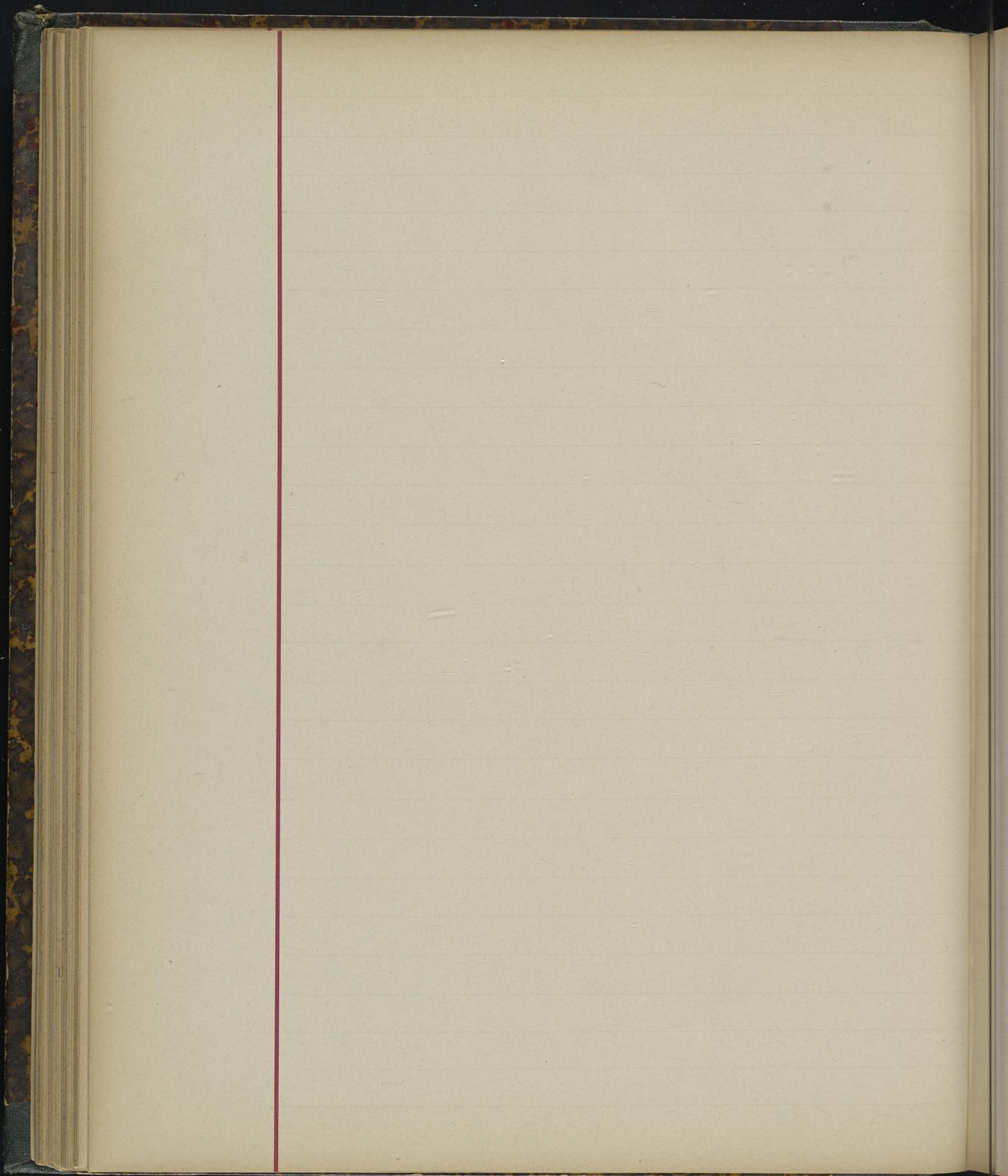
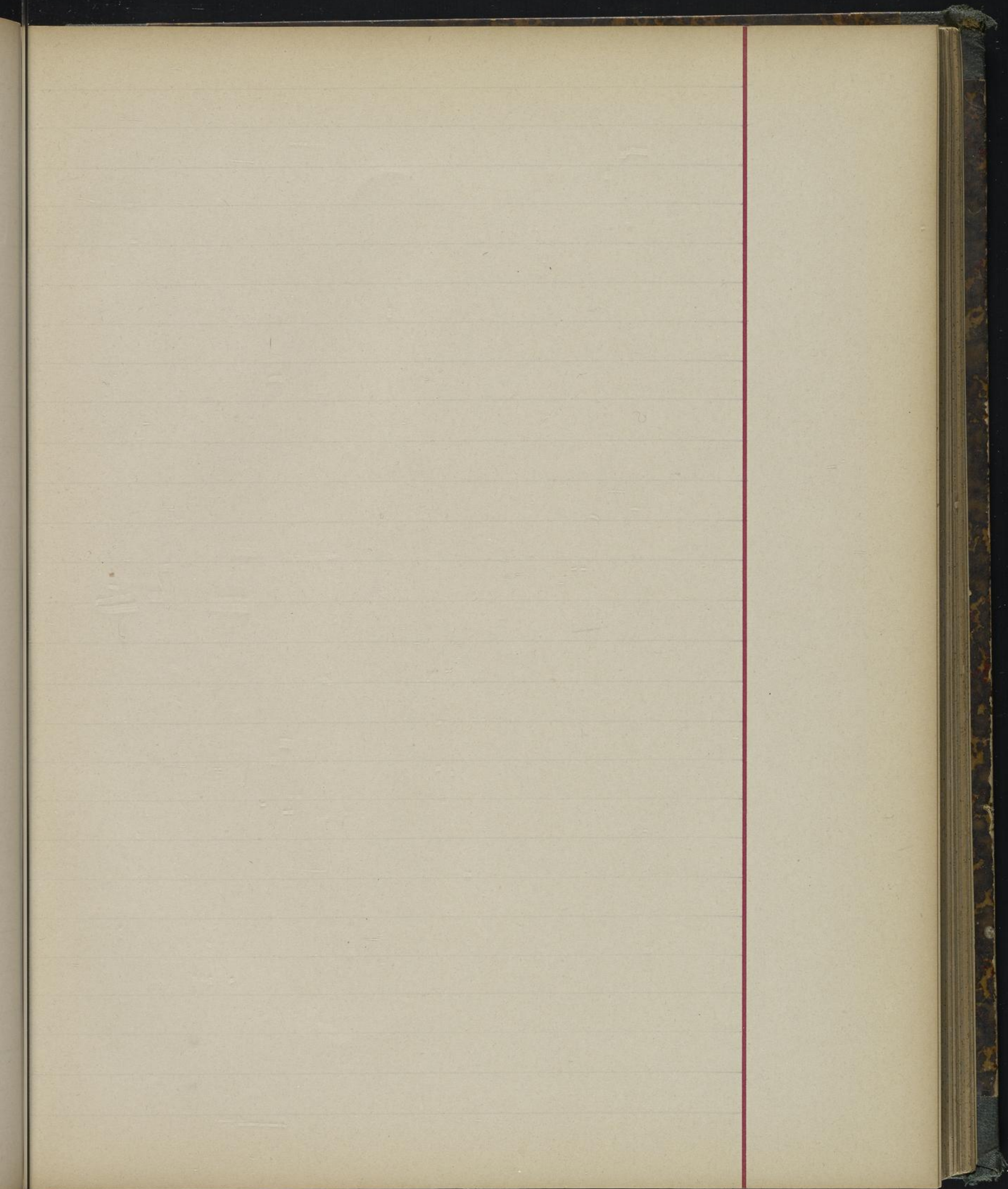
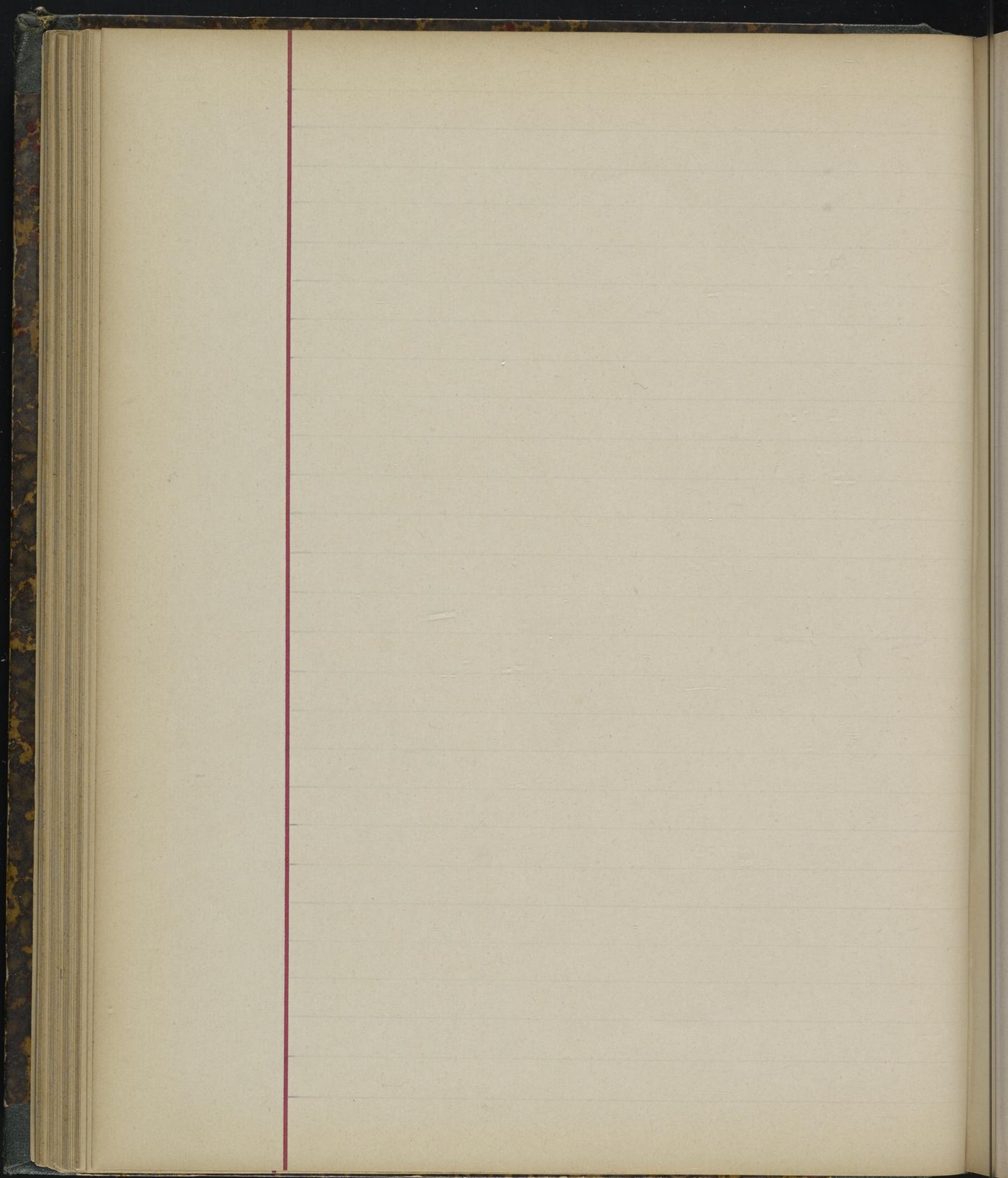
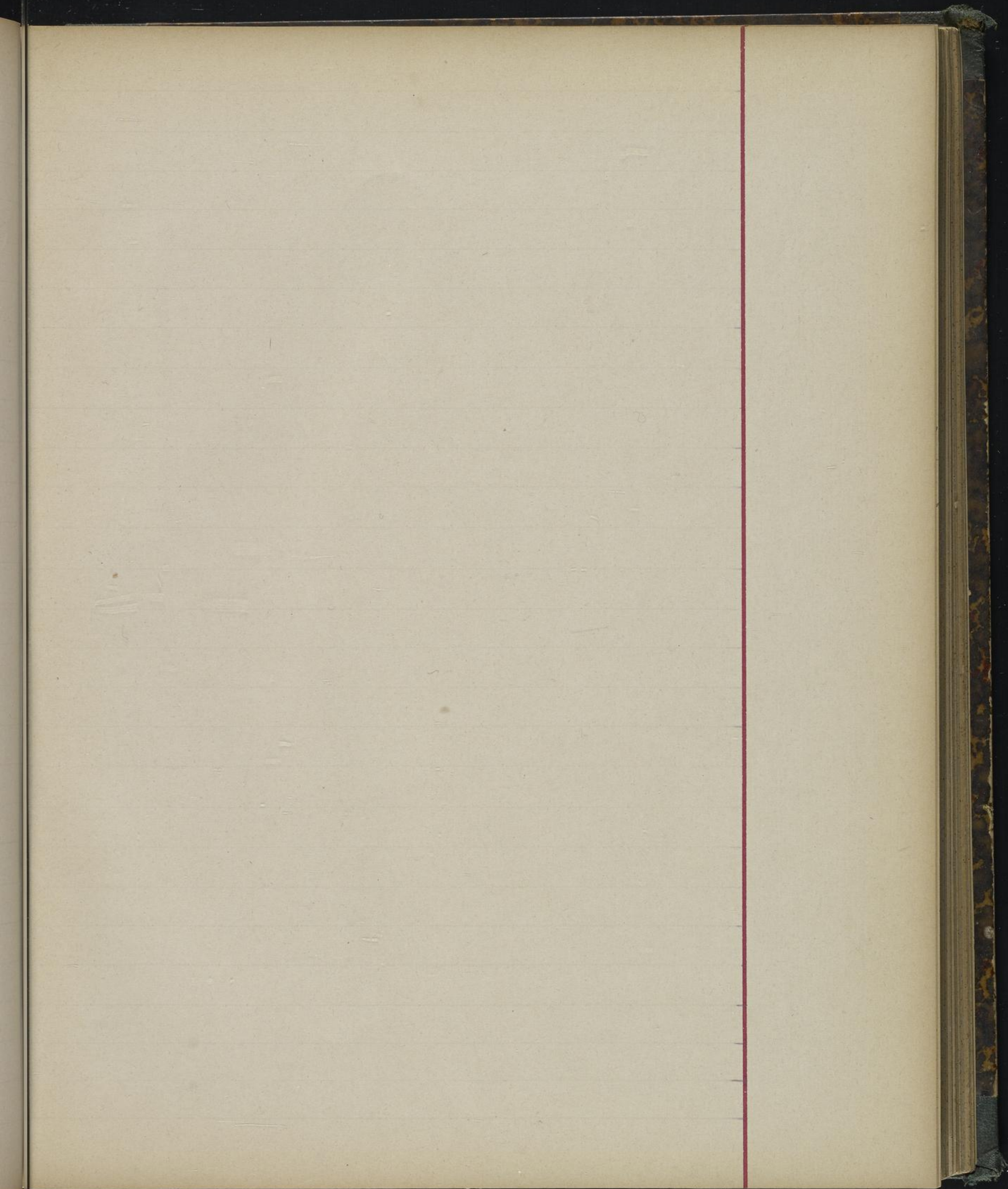
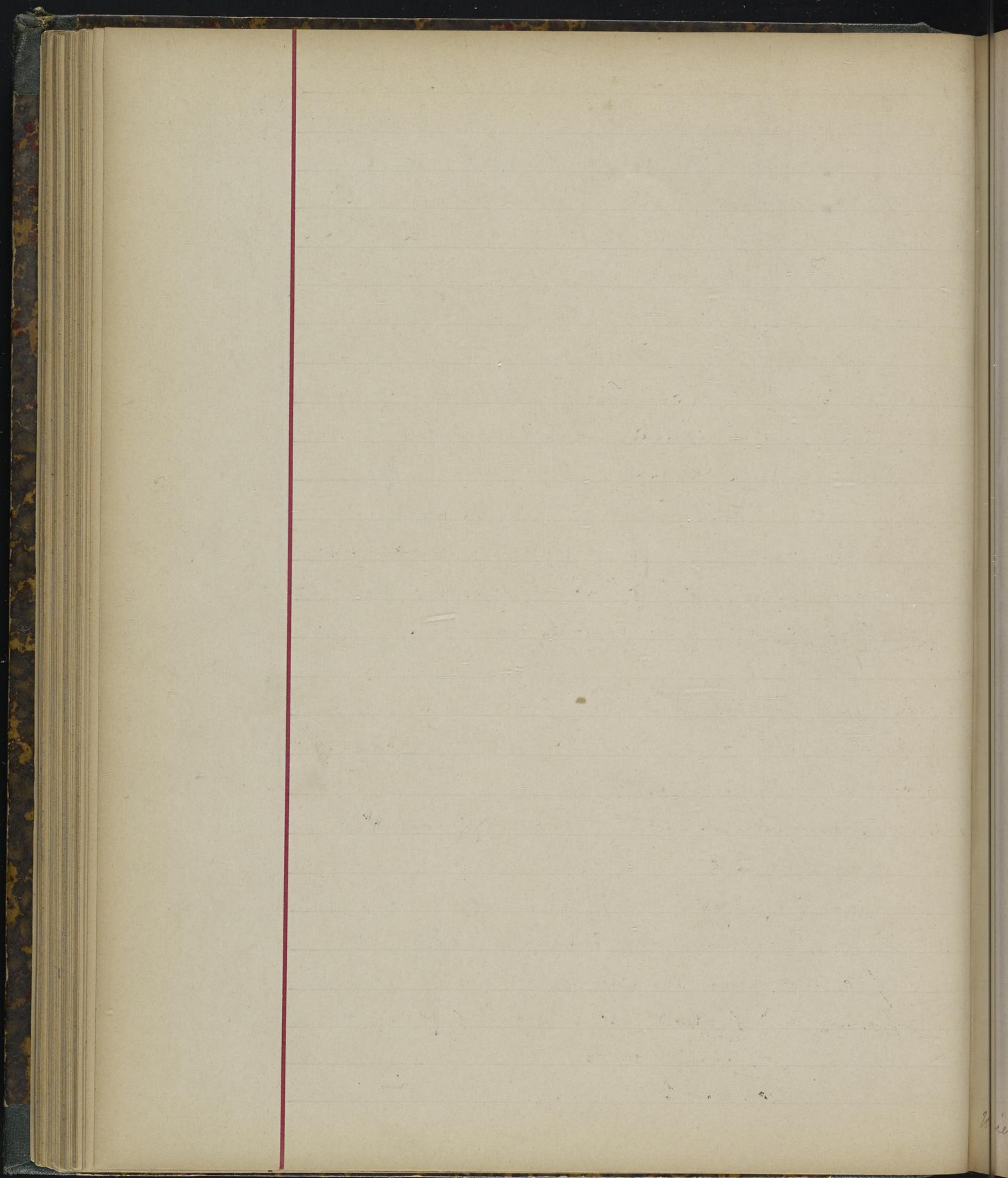
Der gleichmässigen Convergenz der für $\varphi(v_1, v_2, .. v_n)$ gefundenen Reihe wegen ist, wenn $\mu_1, .. \mu_n$ beliebige ganze Zahlen sind

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \varphi(v_1, .. v_n)\, e^{-2(\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n)\pi i}\, dv_1 \ldots dv_n$$

$$= \sum_\nu C_{\nu_1, \ldots \nu_n} \int_0^1 \cdots \int_0^1 e^{2((\nu_1-\mu_1) v_1 + \cdots + (\nu_n - \mu_n) v_n)\pi i}\, dv_1 \ldots dv_n$$

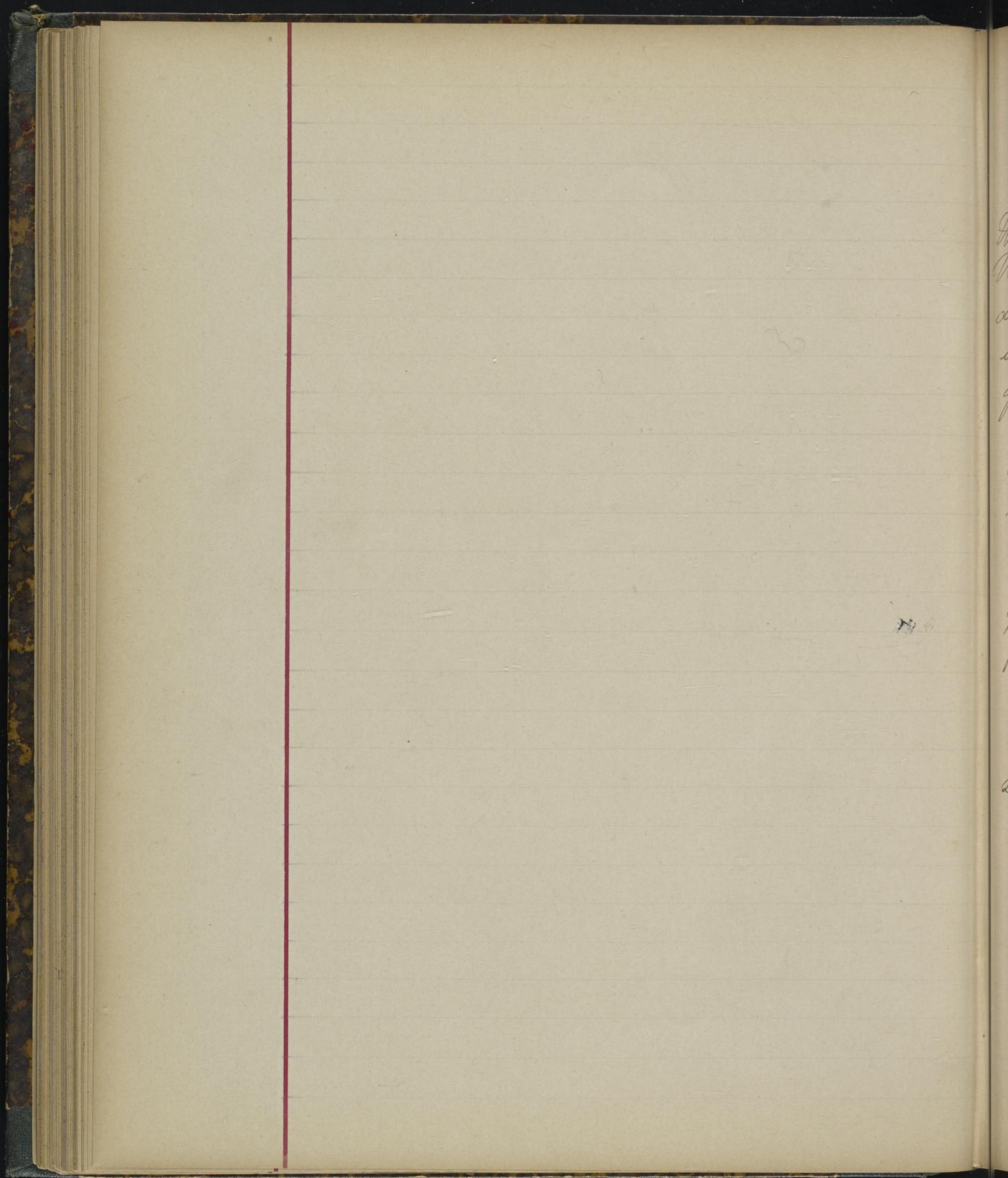
woraus in Uebereinstimmung mit dem oben Angegebenen

$$C_{\mu_1, .. \mu_n} = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \varphi(v_1, \ldots v_n)\, e^{-2(\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n)\pi i}\, dv_1 \ldots dv_n$$

folgt.

Theorie der Elliptischen Functionen

nach

Karl Weierstrass

Sommer
1881.

Eindeutigen Functionen.

26. April. '81

Einführung der Exponen. Funct. in die Analysis.

~~Wie~~
Wie dies auch geschieht kommt man immer auf die Eigenschaft der beständ. Convergi. und die Existence einer singul. Stelle. Wir gehen nun aus von der Eigenschaft dass wenn die Argumentwerthe in arithmetischer Reihe steigen, die Functionswerthe in einer geometrischen Reihe ~~sich wachsen~~.

Characteristische Eigenschaft der Exponent. Funct von der hier ausgegangen wird.

Es sei die Funct

$$f(u) = x$$

Man nehme 3 Werthe des Arg. an in arith Reihe

$$u_1 = u_1$$

$$u_2 = u_1 + a$$

$$u_3 = u_1 + 2a$$

so hat man

$$f(u_1) = x_1$$

$$f(u_2) = f(u_1 + a) = f(u_1) \cdot f(a)$$

$$f(u_3) = f(u_1 + 2a) = f(u_1) \cdot f(a) f(a) = f(u_1) f^2(a)$$

$$f(2u) = f^2(u)$$

$$f(u) \cdot f(v) = f(u+v) = f^2\left(\frac{u+v}{2}\right)$$

$$f(u) = \sqrt{f(2u)} = \left(f(2u)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$F(u+h)\cdot F(v) = F^2\left(\frac{u+h+v}{2}\right)$$
$$F(u)\cdot F(v+h) = F^2\left(\frac{u+v+h}{2}\right)$$

$$\frac{F(u+h)}{F(u)} = \frac{F(v+h)}{F(v)}$$

$$\frac{F(u+h)}{F(u)} - 1 = \frac{F(v+h)}{F(v)} - 1$$

$$\frac{F(u+h) - Fu}{F(u)} = \frac{F(v+h) - F(v)}{F(v)}$$

d.h. der Ausdr. links ist von u unabhängig und

$$\frac{F(u+h) - Fu}{~~F(u)~~ h} = \text{const} = c. = \frac{F'(u)}{F(u)}$$

$$\frac{F'(u)}{F(u)} = \frac{F'(v)}{Fv} = \text{const.} = c$$

$$F'(u) = c \cdot F(u).$$

und die Ableitung ist der Funct selbst proportional.

Man nehme nun an die $F(u)$ sei eine analytische Funct. und entwickelbar in der Nähe eines Punctes a in eine Potenzreihe

$$F(u) = c_0 + c_1(u-a) + c_2(u-a)^2 + \cdots$$

Deren Ableitung ist

$$F'(u) = c_1 + 2c_2(u-a) + 3c_3(u-a)^2 + \cdots$$

Da aber $F'(u) = c \cdot F(u)$ so ist, nach dem Gesetze der indeterm. Coeff.

$c \cdot c_0 = c_1$; $c \cdot c_1 = 2c_2$; $c c_2 = 3c_3$;;;;;; $c c_{n-1} = n c_n$

$$c_n = \frac{c \cdot c_{n-1}}{n}.$$

$$c_1 = c \cdot c_0 \; ; \; c_2 = \frac{c \cdot c_1}{2} = \frac{c \cdot c \cdot c_0}{2} \; ;$$

$$c_3 = \frac{c \cdot c_2}{3} = \frac{c \cdot c \cdot c \cdot c_0}{2 \cdot 3} \; ;$$

$$c_4 = \frac{c \cdot c_3}{4} = \frac{c^4 \cdot c_0}{4!} \; ; \qquad c_n = \frac{c^n c_0}{n!}$$

Unter der Annahme denn dass die Funct. eine analyt. sein soll und wenn die Const $c = 1$ gewählt wird ist sie dargestellt d die Reihe

$$\left[F(u) = 1 + \frac{x}{*} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right]$$

$$F(u) = \sum_0^{\infty} \frac{u^\nu}{\nu!} = \mathcal{E}(u)$$

Denselben Charakter besitzen auch

$\mathcal{E}(cu)$ und $A \cdot \mathcal{E}(cu)$ (und $F(\mathcal{E}u)$)

Man setze $\quad \xi = \mathcal{E}(cu)$

so ist auch $\quad \varphi(u) = F(\xi) = F(\mathcal{E}(cu))$

eine Funct der betrachteten Art.

Sind ϑ 3 Werthe von ϑ, $\vartheta_1 \vartheta_2 \vartheta_3$ in einer arithmetischen Reihe angenommen, so besteht die Gl

$$\xi_1 \cdot \xi_2 - \xi_3^2 = 0$$

Dh wenn in $\mathcal{E}(cu)$ 3 Werthe von u in arith. Reihe angenommen werden, so besteht die Gl.

$$\mathcal{E}(cu_1) \cdot \mathcal{E}(cu_2) - \mathcal{E}^2(cu_3) = 0$$

was auch besteht, wenn man irgend eine rationale und algebrai. Funct von $\mathcal{E}(cu)$ nimt.

$$F(\mathcal{E} cu) \cdot F(\mathcal{E} cu) -$$

mindestens besteht

$$G(u, F(\mathcal{E} u)) = 0$$

Aus dieser charakter. Eigenschaft, dass

$$f(u) = E(u) = x$$
$$E(2u) = x^2$$
$$E(n u) = x^n \text{ etc}$$

lassen sich alle andern Eigensch. ableiten.

$$Eu \cdot Ev = E^2 \frac{u+v}{2}$$

Ist nun $u + v = u' + v'$

so ist $Eu \cdot Ev = Eu' \cdot Ev'$

Setzt man $v' = 0$, und, da $E(0) = 1$

$$E(u) \cdot Ev = E(u') = E(u+v)$$

d.h. $E(u+v) = Eu \cdot Ev$

Ferner $E(u+v+w) = Eu \cdot Ev \cdot Ew$; usw. } Addit. Theorem.

Negative Werthe. Setze $v = -u$

$$E(0) = 1 = E(u) \cdot E(-u)$$

$$E(-u) = \frac{1}{E(u)}$$

$$E(u-v) = Eu \cdot \frac{1}{E(v)}$$
$$E(nu) = E^n(u)$$
$$E(-nu) = E^{-n}(u) = \frac{1}{E(nu)}$$
$$E\left(\frac{v}{u}\right) = E^v\left(\frac{1}{u}\right) =$$

Allgemein für + und neg. ganz. u. Bruchwerthe

$$E(v_1 u_1 + v_2 u_2 + \cdots v_n u_n) = E^{v_1} u_1 \cdot E^{v_2} u_2 \cdots E^{v_n} u_n. \qquad \text{"} \quad \text{"}$$

d.h. der Ausd. links "lässt sich rational aus den einzelnen Theilen zusammensetzen."

Nennt man $\mathfrak{E}(1) = e$

so heissen die Gl^n

$$\mathfrak{E}(\nu) = e^{\nu}$$

$$\mathfrak{E}(-\nu) = e^{-\nu} = \frac{1}{e^{\nu}}$$

$$e\left(\frac{\nu}{u}\right) = e^{\frac{\nu}{u}} = \sqrt[u]{e^{\nu}}$$

und somit ist $e^{u} = x$

erklärt für alle pos. neg. und brch. Werthe des Arg. u.

In $x = e^{u}$

nennt man das System der Argumentwerthe u ein Gebilde im Gebiete des x.

Umkehrung der Funct.

Sieht man x als die unabh. Var. an so heisst $u = \log_e x$

Zu jedem Werthe des u entsp. nur ein W. des x. Wir wollen untersuchen ob u auch eine 1deut. Funct des x ist.

Es ist $x = e^{u} = 1 + u + u^2 + \cdots$

$\frac{1}{x} = e^{-u} = 1 - u + u^2 - u^3 + - + \cdots$

Für compl. Werthe der $u = t + si$

$$x = e^{t} \cdot e^{si}$$

$$e^{t} = 1 + t + t^2 + \cdot \quad =$$

$$e^{si} = (1 + si - s^2 + s^3 i \cdots) = p + qi$$

$$e^{-si} = (1 - si - s^2 - s^3 i \cdots) = p - qi$$

$p^2 + q^2 = 1 = (\text{Absol. Betr.})^2$ von e^{si}

Wir zerlegen die Funct. in 2 Theile

$$x = e^t \cdot e^{si} = r(\alpha+\beta i)$$
$$e^t e^{-si} = r(\alpha-\beta i) \qquad u = t+si$$

Multip. $\qquad e^{2t} = r^2 \qquad e^t = r$

muss $\qquad e^{si} = \alpha+\beta i$

Da s und t beide reel sind so ist

$$t = \text{reel log.}(r)$$

Um si gleichfalls zu bestim. Es giebt einen besond. Werth von s für welche $e^{si} = 1$; nennt man dies 2π so ist

$$e^{2\pi i} = 1$$

(Wahr denn $\qquad e^{si} = 1 + si - s^2 - s^3 i + s^4 + s^5 i - \cdots$

$$e^{-si} = 1 - si - s^2 + s^3 i + s^4 - s^5 i - \cdots$$

($e^{si} = \cos s + i \sin s$; da 1 reel ist so muss $\sin s = 0$ i.e. $s = 2\pi$.)

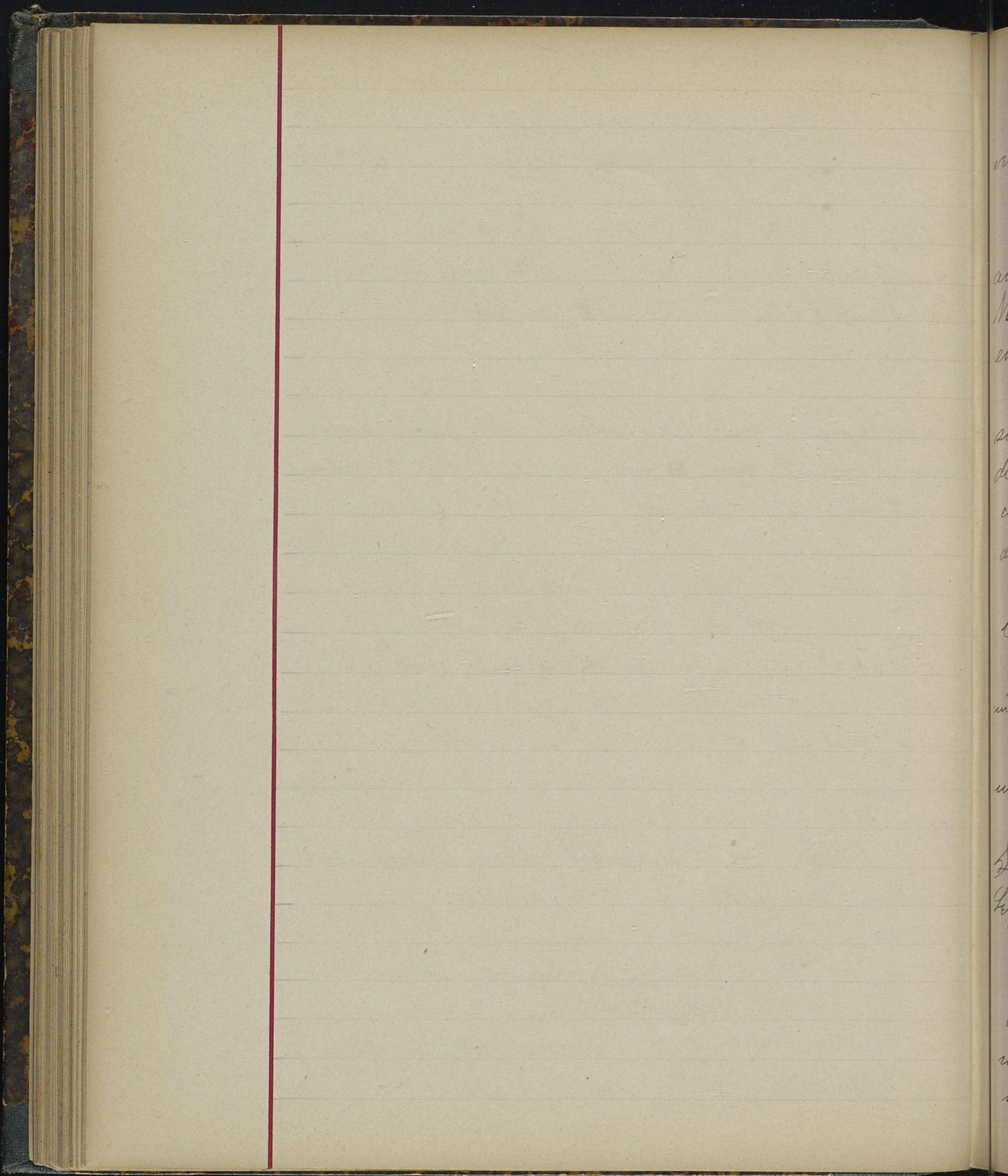
$$\therefore \quad u = t + si + 2\nu\pi i$$

wird bestimmt ist den Minimalwerth, welcher

$$e^{si} = \alpha + \beta i$$

genügt.

Beweis der Periodicität dieser Funct. am besten mittelst der Sin. und Cos.

$$e^{si} = \cos s + i \sin s$$
$$e^{-si} = \cos s - i \sin s \qquad \text{multip.}$$
$$1 = \cos^2 s + \sin^2 s$$
$$e^{(s+2\pi)i} = \cos(s+2\pi) + i \sin(s+2\pi)$$
$$e^{si+2\pi i} = \cos s + i \sin s = e^{si}$$

Forschung nach denjenigen Functionen, welche ein Additionstheorem besitzen.

Wir nehmen an die F sei eine analytische, d.h. darstellbar ~~für~~ ~~ein~~ der Nähe irgend eines Werthes des Arg. durch eine Pot. Reihe

$$\varphi(u) = c_0 + c_1(u-a) + c_2(u-a)^2 + \cdots$$

so lässt sich diese auf eine F reducieren die entwick-bar ist in der Nähe des Opts indem man setzt $u' = u-a$, Sie hat dann die Form $\varphi u = c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + \cdots$

So lange $u+v = u'+v'$ können wir bilden

$$G\left(\varphi u, \varphi v, \varphi\left(\frac{u+v}{2}\right)\right) = 0$$

und

$$G\left(\varphi u' \; \varphi v' \; \varphi\left(\frac{u'+v'}{2}\right)\right) = 0$$

und, nach Elim. von $\varphi \frac{u+v}{2} = \varphi \frac{u'+v'}{2}$ zwischen dien

$$G_1(\varphi u \; \varphi v \; \varphi u' \; \varphi v') = 0$$

Setzt man jetzt $u' = 0$, d.h. $u+v = v'$, so geht Letzteres über in

$$G_2(\varphi u, \varphi v, \varphi(u+v) \; \varphi(0)) = 0 \quad = \text{Add. Theor.}$$

Um diese G_2 in eine Pot. R. zu entwick. setzen wir $\varphi u = x$ $\varphi v = y$ $\varphi(w) = z$ und ordne nach Potenzen von z, so werden die Coeff.

Funct.^n sein ~~from~~ x & y.. der Form —

C $\quad z^n + \mathfrak{F}_1(xy) z^{n-1} + \mathfrak{F}_2(xy) z^{n-2} + \dots + \mathfrak{F}_n(xy) = 0 = \mathfrak{F}(xyz)$

Wir bestim. zunächst eine algebr. Gl. zw. φu & $\varphi' u$

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} \cdot \frac{dx}{du} + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z} \cdot \frac{dz}{du} = 0$$

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dv} + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dv} = 0 \qquad z = u + v \qquad \frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial v}$$

A, $\quad \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dv} = 0$

B, $\quad \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} \cdot \frac{dx}{du} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dv}\right) z^{n-1} + \text{''} + \left(\frac{\partial F_n}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{du} - \frac{\partial F_n}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dv}\right) = 0$

Zw B & C elim. man z, so kommt heraus

$$\mathcal{G}\left(x, y, \frac{dx}{du}, \frac{dy}{dv}\right) = 0$$

oder indem v als const. angesehen $v = 0$

$$\mathcal{G}\left(x, y, \frac{dx}{du}\right) = \mathcal{G}(\varphi u, \varphi v, \varphi' u) = 0$$

Für $v = 0$ werden nicht alle Glieder verschwinden denn wir bringen die Gl. in die Form,

$$\mathcal{G}_0(xy) + \mathcal{G}_1(yx) \cdot \frac{dy}{dv} + \dots$$

Man ordne nämlich nach $\frac{dy}{dv}$ u.s.w. Verschwindet dann jedes Glied der Entw. für $v = 0$, so tritt v oder eine Potenz von v als Factor in jedem Glied auf, und kann mit v dividirt werden. Die Entwick. hat dann

a

die Form $\quad \mathcal{G}_0\left(x y \frac{dx}{du}\right) + \mathcal{G}_1(\ ) \frac{dy}{dv} + \mathcal{G}_2(\ )\left(\frac{dy}{dv}\right)^2 + \dots$

Oder $G_0(\varphi u\ \varphi v\ \varphi' u) + G_1(\varphi u\ \varphi v\ \varphi' u)\,\varphi' v + \dots$

Für $v \lessgtr 0$ wird jedes Glied. Coeff.

$$G_n(\varphi u\ \varphi v\ \varphi' v) = \text{etwa } \alpha$$

und α muss auch φv als Factor enthalten

D. h. so kommt $G_n(\varphi u\ \varphi' u) = \frac{\alpha}{\varphi v} = \beta = \text{const}$ i. B. f. v

Oder ist $\varphi' v = 0$ für $v = 0$ so ist $\varphi(v) = \text{const}\ (v=0)$

$\varphi' 0 = 0$ so ist $\varphi(0) = \text{const.}$

und wir haben aus den Voraussetzung

$$\dot{G}(\varphi u\ \varphi v\ \varphi(\tfrac{u+v}{2})) = 0$$

$$G(\varphi' u\ \varphi' v\ \varphi\tfrac{u+v}{2}) = 0$$

das $\varphi(\frac{u+v}{2}) = \varphi(\frac{u+v}{2})$ zu elimin. und erhält

$$G_2(\varphi u\ \varphi v\ \varphi(u+v)) = 0$$

Wir untersuchen diejenigen Fn bei welchen wenn ~~zw.~~ den Argum. werthen eine algebra. ~~Relation~~ Gleichung besteht, dass dann auch zw den Fn werthen ebenfalls eine algebr. Gl besteht.

Es seien auch analyt. Fn mit den wir handeln. Eine solche sei $\varphi(u)$, so ist φ für irgend einen Werth ~~x~~ $= a$ entwick in der Nähe von a in einer Pot. R. die nach Pot. von $u-a$ fortschreitet.

$$\varphi(u) = A_0 + A_1(u-a) + A_2(u-a)^2 + \cdots$$

Zw. 3 Arg. werthen bestehe die Relat $u_2 = \frac{u_1+u_3}{2}$

$$\varphi(u_1) - A_0 = A_1(u_1-a) + A_2(u_1-a)^2 + \cdots$$
$$\varphi(u_2) - A_0 = A_1(u_2-a) + A_2(u_2-a)^2 + \cdots$$
$$\varphi(u_3) - A_0 = A_1(u_3-a) + A_2(u_3-a)^2 + \cdots$$

Wenn u_1 u_3 im Conv. kreis liegen so liegt immer auch u_2 darin. Durch Transp. u. Div. d. A_1

1 $$u_1 - a = \frac{1}{A_1}(A_0 - \varphi u_1) + \frac{A_2}{A_1}(u_1-a)^2 + \frac{A_3}{A_1}(u_1-a)^3 + \cdots$$

2 $$u_2 - a = \frac{1}{A_1}(A_0 - \varphi u_2) + \frac{A_2}{A_1}(u_2-a)^2 + \cdots$$

3 $$u_3 - a = \frac{1}{A_1}(A_0 - \varphi u_3) + \frac{A_2}{A_1}(u_3-a)^2 + \cdots$$

Aus 1 & 3 d. Add

$u_1 + u_3 - 2a = 2(u_2 - a)$. $\quad u_2 - a = \frac{1}{A_1}\left(-\frac{\varphi u_1 + \varphi u_3}{2} + A_0\right) + \cdots$

Wir haben dann

$$u_2 - a = \frac{1}{A_1}(A_0 - \varphi u_2) + \cdots$$

$$= u_2 - a = \frac{1}{A_1}\left(A_0 - \frac{\varphi u_1 + \varphi u_3}{2}\right) + \cdots$$

woraus eine Gl. zw. φu_2 & $\frac{\varphi u_1 + \varphi u_3}{2}$
oder $G(\varphi u_1\ \varphi u_2\ \varphi u_3) = 0$ Q.E.D.

Wenn th. zw den Arg.werthen einer beliеb. analyt. Fu. die Gl. besteht $u_2 = \frac{u_1 + u_3}{2}$ so besteht eine Gl. zw $\varphi u_1, \varphi u_2, \varphi u_3$.

Die Arg.werthe sind d. Add. & Subt. verbunden worden, und die resultirende Gl. $(\varphi u_1\ \varphi u_2\ \varphi u_3)$ ist unbekannter Natur, und gilt für ein einziges Fu. Element.

Wir reduc. die Reihe für $\varphi(u)$ auf die Null Stelle indem wir v einsetzt für $u-a$

Solange denn $v_2 = \frac{v_1 + v_3}{2}$ $\varphi(v)$ besteht $G(\psi v_1\ \psi_2 v\ \psi_3 v) = 0$
wo $v_1\ v_3$ beliebig sind. solange $v_1' + v_3' = v_1 + v_3$ ist
Dudh $v_2 = \frac{v_1' + v_3'}{2}$ und $G(\psi v_1'\ \psi_2 v_2\ \psi v_3') = 0$

Aus diesen 2 Gl. können wir v_2 elim. und erh. $G(\psi v_1\ \psi v_3\ \psi v_1'\ \psi v_3') = 0$

Setzt man nun $v_3' = 0$; $v_1' = v_1 + v_3$ so
$$G(\psi v_1\ \psi v_3\ \psi(v_1 + v_3)) = 0$$

Wir wollen die Natur dieser Fu näher betr.

$$\mathfrak{G}(\varphi u\ \varphi v\ \varphi u{+}v) = 0.$$

indem wir setzen $\varphi u = x$ $\varphi v = y$ $\varphi(u+v) = z$. und erhalten

1 $$G(x\,y\,z) = 0$$

2 $$\frac{\partial G}{\partial x}\frac{dx}{du} + \frac{\partial G}{\partial z}\frac{dz}{du} = 0$$

3 $$\frac{\partial G}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dv} + \frac{\partial G}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dv} = 0$$

4 $$\frac{\partial G}{\partial x}\frac{dx}{du} - \frac{\partial G}{\partial y}\frac{dy}{dv} = 0$$

Zw. 4 u 1 ist z zu elim. und d ergiebt

$$\mathfrak{G}\left(x, y, \frac{dx}{du}, \frac{dy}{dv}\right) = 0$$

oder

$$\mathfrak{G}(\varphi u, \varphi v, \varphi' u, \varphi' v) = 0$$

Denn 1 & 4 haben als Fu von z ~~mindesten~~ eine Wz gemein.
also einen Factor der z ~~mindest im erst~~ enthält
und auch eine Fu. von $x\ y\ x'\ y'$ ist, o

$$\varphi(u+v) = z = \mathfrak{F}\left(x, y, \frac{dx}{du}, \frac{dy}{dv}\right)$$

$$\varphi(u+v) = \mathfrak{F}(\varphi u\ \varphi v\ \varphi' u\ \varphi' v)$$

Wir nehmen den Fall wo $\mathfrak{F}$ = Rat fu. und
warten mit dem allgem Fall. Dieser spec Fall
$R(\ )$ giebt die ident Fu. und die Anzahl
der wesentl. sing. Stellen ist eine die im ∞ liegt.

Haben jetzt $\varphi(u+v) = R(\varphi u\ \varphi v\ \varphi' u\ \varphi' v)$

30/4/81

Convergiert die Pot R. dieser Fi für $|u| < r$

und auch für $|v| < r$

so conv't sie auch für $|u+v| = |u'| < 2r$

Setze man $u = v$

$$\varphi(2u) = R_1(\varphi\tfrac{u}{2}\ \varphi'\tfrac{u}{2})$$

welches definirt ist für $|u| < 2r$

Durch Wiederh. dieses Verfahrens, kann die Fi beliebig fortgesetzt werden.

Dies nicht ohne Bedenken da φ eine Rat Fi sein soll und sich darstell. lässt d Quot

$$\varphi(u+v) = \frac{G(\varphi u\ \varphi v\ \varphi' u\ \varphi' v)}{G_0(\quad\quad)}$$

Es kann vorkommen dass für $u=v$ $\frac{G=0}{G_0=0}$ in welch. Fall der wahre Werth zu ermitteln ist. Man setze statt u $\frac{u}{2}+h$ statt v $\frac{v}{2}-h$

$$\varphi(u)\cdot G_0(\varphi(\tfrac{u}{2}+h);\varphi(\tfrac{u}{2}-h);\varphi'(\tfrac{u}{2}+h);\varphi'(\tfrac{u}{2}-h)) = G(\varphi(\tfrac{u}{2}+h)\ \varphi\ \text{etc}).$$

Das Anfangsglied der Entwick. in Pot R. nach h muss auf beiden Seiten dieselbe Potenz von h enthalten $h^n(\frac{F_u}{2}\ \ldots)\varphi u = h^n(G\ \ldots)$.

$$\varphi u = \frac{F(\frac{u}{2})}{G(\frac{u}{2})} \quad \text{oder}$$

$$\varphi u = R_1(\quad) \quad \text{QED}$$

Das Verfahren läßt eine belieb. Wiederh. zu.

Haben $\frac{F u}{G u}$ und $\frac{F_1 u}{G_1 u}$ einen gemein. Conv. ber. und nehmen sie dieselben W. für $u < r$ so sind sie ident. und

$$F G_1 - F_1 G = 0 \qquad u < r.$$

denn sie haben ∞ viele Werthe gemein, folgl. in der Entwickelung der letzten Gl. sind alle Coeff. gl. Null.

In jedem Fall wird $\varphi(u) = \frac{F(\frac{u}{2})}{G(\frac{u}{2})}$ eine ganze Fu von $F(\frac{u}{a})$ und deren Ableitungen in endl. Anzahl. Die höhere Ableit.^{n} lassen sich rat. durch die Fu und deren erste Abl. ausdrücken, &

$$\varphi(u) = R_1(\varphi \tfrac{u}{2}, \varphi' \tfrac{u}{2})$$

Dies kann immer mindestens als Quot. 2er Potenzreihen dargest. ~~werden~~

$$\varphi = \frac{f_1}{g_1}$$

und belieb. fortgesetzt werden. In der Pot-Reihe kommen neg. Pot. vor so hat man 3 Fälle in

$$(u-a)^{\mu - \nu} \frac{A_0 + A_1(u-a) + \cdots}{B_0 + B_1(u-a) + \cdots}$$

jenachdem $\mu > \nu$, φ hat weiter Werth 0 für $u = a$

$\mu = \nu$ . . . . I oder $\frac{A_0}{B_0}$

$\mu < \nu$ . . . . ∞ . .

Soll

Soll nun $\varphi u = \frac{f_1}{g_1}$
den Werth $\varphi(u_1) = \frac{f}{g}$
annehmen, so ist dies nit mög. denn nicht

$$\frac{f_1}{g_1} = \frac{f}{g}$$

Wir lassen u in $u+h$ übergehen; so ist

$$\frac{f(u+h)}{g(u+h)} = h^{\lambda} \frac{c_0 + c_1 h + \cdots}{c'_0 + c'_1 h + \cdots} = h^{\lambda} \cdot \mathfrak{P}(h)$$

$$= (u-a)^{\lambda} \mathfrak{P}(u-a)$$

Damit die neue Fu ~~mit der and. übereinstimmen~~ erweitert werden könne, muss sie mit der ersten überein stimmen.

$$\varphi(u+v) = \frac{G_1(\varphi u\ \varphi v\ \varphi' u\ \varphi' v)}{G_0},$$

$G_0 \cdot \varphi(u+v) - G_1 = 0$, solange $|u| < r$.

Es giebt also eine Fu, welche für kleine Werthe des Arg. mit $\varphi(u+v)$ übereinstimmt. und welche darstellbar ist d den Quot. 2er Pot R. die für $|u| < r$ converg.

Zu beweisen das eine solche Fu monogen ist, dh. dass alle Elem. aus einem entspringen.

1 Für alle endl. u hat sie einen bestimmt Werth weil keine negat. Pot vorkommen.

(2) Ist $\varphi(u) = (u-a)^{-\lambda} \mathfrak{P}(u-a)$ so nehme man

$$\frac{1}{\varphi u} = \psi u = (u-a)^{+\lambda} \mathfrak{P}(u-a)$$

die endl. Stetigk. für alle endl. Werthe desselben.

Satz.

Wenn a einen ganz belieb. Werthe des Arg. ist so kann man in seiner Nähe eine Umgeb. angeben wo keine sing. Werthe existiren. Denn es kann die Umgeb. so klein angenommen werden, dass keine andere Ausnahmepkt. als a selbst darin ist und dann nehme man die reciproke Fu. $\frac{1}{\varphi}$.

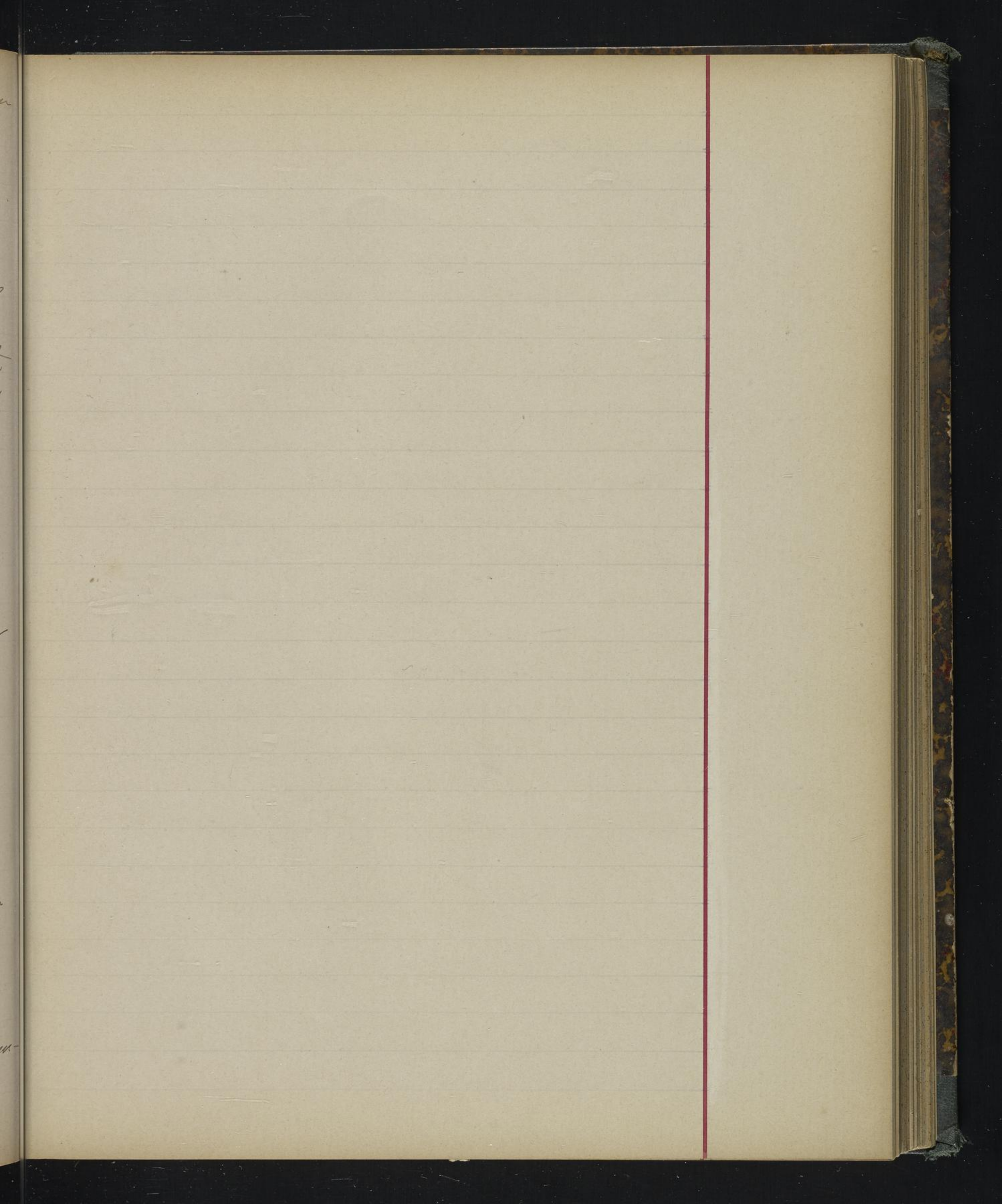
Satz

Im endl. Bereich hat die Fu nur eine endl. Anzahl von sing. Stellen, denn wären ∞ viele darin, so würde ein Pt sich finden lassen, wo die sing. Stellen in jeder Nähe derselben in ∞ Anzahl vorhanden wäre, die zu den definirten gehörten.

Hat $\varphi = \frac{f}{g}$ mehrere mehrfache sing. Stellen so mult. man mit

$$(u-a_1)^{\lambda_1}(u-a_2)^{\lambda_2}(\ )(\ )\cdots(u-a_n)^{\lambda_n} = g(u)$$

und das Prod. wird nie ∞ im Endl.

Der conv. Rad. r muss mit mit dem der gegeb. Funct. übereinstimmen.

3. Mai

Soll Fn einen bestimmt. Convbereich haben, so ist zu beweisen dass es im Unend. Werthe von u giebt für welche $F u = \infty$

Für $u > R$ soll $F(u) > G$.

Bew. Unter den Coeff der Reihe, wähle man einen der $\gtrless 0$ ist $= c_\nu > 1$

Für $|u| > \rho$ soll Maxim. $f(u) = g$

Es ist $c_\nu \leqq g \rho^{-\nu}$ $\quad |u| = \rho$

daraus $g \geqq |c_\nu| \rho^\nu$

und da ρ beliebig gross angenomm werd. kann ist g beliebig gross Q.E.D.

Diesen Satz ausnamslos.

(Das νte Gld sei $+ c_\nu u^\nu +$, so muss das Max der Fn grösser sein als dies Gld. $g > c_\nu u^\nu$

$\frac{g}{u^\nu} > c_\nu$

$g \rho^{-\nu} > |c_\nu|$

$g > |c_\nu| \rho^{\nu}$.)

Ist dann $\mathfrak{F}(u) = (u-a)^{-\lambda}\mathfrak{P}(u-a)$

$$= A(u-a)^{-\lambda} + A_1(u-a)^{-\lambda+1} + \cdots A_\lambda(u-a)^{-1} + \mathfrak{P}_1(u-a)$$

oder

$$\mathfrak{F}(u) = R(u,a) + \mathfrak{P}_1(u-a)$$

So ist

$$\mathfrak{F}(u) - R(u,a) = \mathfrak{P}_1(u-a)$$

eine Fu. die nicht Null wird im Endlichen und falls sie unendl. wird so wird

$$\frac{1}{\mathfrak{F}-R} \text{ nicht unendlich im Endlichen}$$

4ten Mai '81

Ebenso wie e^u ist auch $e^{G(u)}$ niemals = Null im Endlichen. Wir wollen zeigen dass jede derartige Fu in der Form darst. lässt

$$G = e^{G_1(u)}.$$

Beweis:

Man

$$G' = e^{G_1(u)} G_1'(u) = G G_1'$$

$$\frac{G'}{G} = G_1'$$

Der Annahme nach ist G nie Null, daher $\frac{G'}{G}$ nie unendl. lässt sich in Pot R. darstell die beständ conv.

$$\frac{G'}{G} = c_0 + c_1 u + \cdots = \sum_0^\infty c_\nu u^\nu = G_1' u$$

Wir haben jetzt eine Fu gebildet deren Ableitung dieser gleich ist, näml

$$C + \sum_0^\infty \frac{c_\nu}{\nu+1} u^{\nu+1} = G_1 u$$

Wo das C bestimmt wird, indem die Fu einen vorgeschr. Werth annehmen soll für u=0,
Die Constante könnte auch als Factor erscheinen

$$G(u) = G_0(0)\, e^{G_1(u)} = G_0(0)\, e^{\sum \frac{c_\nu}{\nu+1} u^{\nu+1}}$$

$$G(0) = e^c$$

$$G(u) = e^{c + G_1(u)}.$$

Wir wollen eine Fu so bestim. dass

1 die erste Ableit gleich sich selbst multipl. mit einer Pot. R. ist, und

2 Fu(0) einen vorgeschr. Werth annehmen soll.

(1) $G(0) = c$

(2) $G'(u) = \sum c u^\nu \cdot G(u)$

Dies ist immer mögl. wenn $\sum c u^\nu$ convergirt, denn wenn $\sum c u^\nu$ conv. so convergt. auch $\sum \frac{c_\nu}{\nu+1} u^{\nu+1}$ und conv. auch die erste Abl. so haben beide Seiten der Gl (2) denselben Conv Bereich.

Der Ausdruck

(3) $$G(u) = C_0\, e^{\sum \frac{c_\nu}{\nu+1} u^{\nu+1}}$$

giebt alle solche Functionen an, denn hier ist

(4) $$\overline{G'(u)} = \sum c_\nu u^\nu \cdot \overline{G}(u)$$

Bestehen (2) und (4), so kann man $\sum c_\nu u^\nu$ daraus eliminiren und erhält.

$$\left(\frac{\bar{G} G' - G \bar{G}'}{G \cdot \bar{G}} = 0 = \frac{d}{du} \frac{G}{\bar{G}} \right.$$ (nicht wahr!)

Besser hat man direct, wenn

$$\frac{G'u}{Gu} = \frac{\bar{G}'u}{\bar{G}u}$$

so muss Gu sich von $\bar{G}u$ nur um einen constanten Factor unterscheiden.

Oder aus $G'u$

Die Fu $\bar{G}(u) = c_0 e^{\sum \frac{c_\nu}{\nu+1} u^{\nu+1}} = c\, e^{G_1(u)}$

wo $G(0) = 0$ hat die 2 verlangten Eigensch.

Wir bezeichnen mit a eine Nullstelle einer Fu. $_x$ und, damit die Anzahl der Nullstellen im Endlichen eine endliche sei, stellen wir die Bedingung auf für die Reihe $a_1\, a_2 \dots a_n$ — es soll

$\lim (a_n) = \infty$ für $n = \infty$.

Es soll

1 die Fu. darstellbar sein d eine beständig convergirende Pot. Reihe, und

2 $F(a_\lambda) = 0$

3 $F(b_\lambda) \gtrless 0$ $\quad F(a^\lambda) = 0^\lambda$.

Die Fu wird sich dann darstellen lassen als etc

$$G(u) = c_\lambda (u-a)^\lambda + c_{\lambda+1}(u-a)^{\lambda+1} + \cdots$$

$$G'(u) = \lambda c_\lambda (u-a)^{\lambda-1} + (\lambda+1) c_{\lambda+1}(u-a)^\lambda + \cdots$$

$$\frac{G'}{G}(u) = \frac{\lambda + \frac{(\lambda+1)c_\lambda}{\lambda}(u-a) + \cdots}{(u-a)\left(1 + \frac{c_{\lambda+1}}{c_\lambda}(u-a) + \cdots\right.}$$

$$= \frac{\lambda}{u-a} + \mathfrak{P}(u-a)$$

Diese Fu G muss $= 0$ für $u = a$; d.h. hat die verlangte Eigen. was die einzige Nullstelle a anbetrifft. Um alle Nullstellen $a_1 \cdots a_n$ zu enthalten aber muss die Fu die Form haben

$$F(u) = \sum \frac{1}{u-a_\nu} = \frac{G'}{G}$$

aber es haben auch andere Fu^n dieselbe Eigensch. Wir nehmen an

$$F(u) = \sum_\nu \frac{g_\nu u}{(u-a_\nu)\, g_\nu(a_\nu)}.$$

Wenn diese Reihe convergiert, so hat sie die obige Eigenschaft, denn $\frac{g_\nu u}{(u-a) g_\nu a}$ lässt sich auf die Form bringen

$$\frac{1}{u-a} + \frac{g_\nu u - g_\nu a}{(u-a)\, g_\nu a} =$$

$$= \frac{1}{u-a} + \left(u \frac{g_\nu u}{g_\nu a} - 1\right) \frac{1}{1 - \frac{a}{u}}$$

Das letzte Glied aber lässt sich in einer P.R. entwickeln, und

$$F(u) = \frac{1}{u-a} + \mathfrak{P}(u-a) = \frac{G'}{G}$$

Ueber das $g_\nu u$ specialisieren wir

$$F(u) = \sum \frac{u^{m_\nu}}{(u-a_\nu)\cdot a_\nu^{m_\nu}}$$

wo a so gewählt werden kann, dass die Reihe beständ. conv. wird.

$$F(u) = -\sum \frac{1}{1-\frac{u}{a_\nu}}\cdot\frac{1}{a_\nu}\cdot\left(\frac{u}{a_\nu}\right)^{m_\nu}$$

Man kann zu der Reihe der Nullstellen

6,5,'81

$$a_1, a_2, \dots a_n$$

eine zweite Reihe so zuordnen

$$m_1, m_2, \dots m_n$$

dass die Funct.

$$F(u) = \sum \frac{u^{m_\nu}}{(u-a_\nu)\,a_\nu^{m_\nu}}$$

stets einen endl. Werthe hat. (Bei dieser F(u) sind die $a_1 \dots a_n$ Unendl. keits stellen ‡, bei der Fū $G(u)$ dagegen Nullstellen). Man kann dann eine transcendente Fū bilden, welche $a_1 \dots a_n$ zu Nullstellen haben soll, nämlich $G(u)$ in

$$G'(u) = G(u)\cdot F(u).$$

und $G(u)$ hat keine andere Nullst. als $a_1 \dots a_n$.

Wir nehmen zuerst ein einziges Glied —

$$\frac{f'}{f} = \frac{u^m}{(u-a)a^m}.$$

Dies kann in die Form gebr. werden

$$= \frac{u^m - a^m}{(u-a)a^m} + \frac{1}{u-a}$$

$$g = \frac{1}{u-a} + \frac{u^{m-1}}{a^m} + \frac{u^{m-2}}{a^{m-1}} + \cdots + \frac{u^0}{a}$$

Bezeichnen wir nun mit

$$f(u) = \left(1-\frac{u}{a}\right) e^{\frac{u}{a} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{a^2} + \cdots + \frac{1}{m}\frac{u^m}{a^m}}$$

$$f'(u) = \left(\left(1-\frac{u}{a}\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{u}{a^2} + \frac{u^2}{a^3} + \cdots \frac{u^{m-1}}{a^m}\right) - \frac{1}{a}\right) e^{(\ )}$$

Fehler hier.

$$\frac{f'(u)}{f(u)} = \frac{1}{u-a} + \frac{1}{a} + \frac{u}{a^2} + \frac{u^2}{a^3} + \cdots \frac{u^{m-1}}{a^m}$$

~~$$fu = \frac{1}{a} + \frac{u}{a^2} + \cdots \frac{u^{m-1}}{a^m}$$~~

$$f'(u) = \left\{-\frac{1}{a} + \left(1-\frac{u}{a}\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{u}{a^2} + \cdots \frac{u^{m-1}}{a^m}\right)\right\} \cdot e^{\frac{u}{a} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{a^2} + \cdots \frac{1}{m}\frac{u^m}{a^m}}$$

$$= \left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{u}{a^2} + \frac{u^2}{a^3} + \cdots + \frac{u^{m-1}}{a^m} - \frac{u}{a^2} - \frac{u^2}{a^3} - \cdots - \frac{u^{m-1}}{a^m} - \frac{u^m}{a^{m+1}}\right) e^{\frac{u}{a}}$$

Unser einzelnes Glied ist aber

$$g = \frac{1}{u-a} + \frac{u^0}{a} + \frac{u}{a^2} + \cdots \frac{u^{m-1}}{a^m} \qquad = f' = -\frac{u^m}{a^{m+1}} e^{\frac{u}{a} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{a^2} + \cdots}$$

und

$$F(u) = \sum \frac{u_\nu^{m_\nu}}{(u-a_\nu)a_\nu^{m_\nu}}$$

$$fu = \left(1-\frac{u}{a}\right) e^{\frac{u}{a} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{a^2} + \frac{1}{3}\frac{u^3}{a^3} + \cdots + \frac{1}{m}\frac{u^m}{a^m}}$$

$$f'u = \left(-\frac{1}{a}, + \frac{1}{a} + \frac{u}{a^2} + \frac{u^2}{a^3} + \cdots + \frac{u^{m-1}}{a^m} - \frac{u}{a^2} - \frac{u^2}{a^3} - \frac{u^3}{a^4} - \cdots - \frac{u^{m-1}}{a^m} - \frac{u^m}{a^{m+1}}\right) e^{\frac{u}{a} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{a^2} + \cdots}$$

$$\frac{f'}{fu} = \frac{-\frac{u^m}{a^{m+1}}}{\frac{a-u}{a}} = \frac{-a u^m}{(a-u)\cdot a^{m+1}} = \frac{u^m}{(u-a)a^m}$$

Bezeichnen wir mit

$E(u,0)$ die Fn $1-u$

$E(u,1)$ " " $(1-u)e^{u}$

$E(u,2)$ " " $(1-u)e^{u+\frac{1}{2}u^2}$

" " " "

$E(u\,n)$ " " $(1-u)e^{u+\frac{1}{2}u^2+\cdots+\frac{1}{n}u^n}$

so ist $\frac{\partial f(u)}{\partial u} = E(\frac{u}{a},m) = E(\frac{u}{a}\,m) : \frac{u^m}{(u-a)a^m}$?

Diese Fn theile man in 2 Theile vom ersten bis zum $n$ten Gliede, und n bis zum $m$ten Gliede. und schreibe man

$$F(u) = \underset{n}{F}(u) + \overline{\underset{n}{F}(u)}$$

Man nehmen jetzt die Funct. $\prod_1^{\infty} E(\frac{u}{a},n_\nu)$ welches sich auf den ersten Theil bezieht so ist derselbe

$$= \frac{\partial}{\partial u}\prod_1^n = \underset{n}{F}u \cdot \prod_1^n E(\frac{u}{a}\,n_\nu)$$ denn

$$\underset{n}{\Pi} = (1-\frac{u}{a})^{n+1} e^{\frac{n u}{a}+\frac{n-1}{2}\frac{u^2}{a^2}+\cdots\frac{1}{n}\frac{u^n}{a^n}}$$

$$F(u) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{u^{m_\nu}}{(u-a_\nu)a_\nu^{m_\nu}} = \sum_{\nu=0}^{n}\frac{u^{m_\nu}}{(u-a_\nu)a_\nu^{m_\nu}} + \sum_{n+1}^{\infty}\frac{u^{m_\nu}}{(u-a_\nu)a_\nu^{m_\nu}}.$$

$$= F_n(u) + \overline{F_n}(u)$$

Um $\underset{n}{F}(u)$ zu untersuchen bringen wir sie auf die Form $-\sum \frac{1}{1-\frac{u}{a_\nu}} \cdot \frac{u^{m_\nu}}{a^{m_\nu+1}}$

$f(u) = E(\frac{u}{a}\,m)$

$\frac{f'(u)}{fu} = \frac{u^m}{(u-a)a^m}$

$f(u) = -\frac{u^m}{a^{m+1}}e^{\frac{u}{a}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{a^2}+}$

$= -{}^{\nu}$

$$\frac{P'(u\pi)}{P(u\pi)} = -\overline{F}_\nu(u) = -\sum_n \frac{1}{1-\frac{u}{a_\nu}} \cdot \frac{u^m}{a^{m+1}}$$

wo $\overline{F}(u)$ ∞ wird an den Stellen an a_{m+1} ......

P lässt sich in ein Pot. R. entw.

$$P(u\pi) = \sum_0^\infty c_\mu u^\mu.$$

Man setze $\mathfrak{P}(u\pi) = \sum_0^\infty \frac{c_{n\mu}}{\mu+1} u^{\mu+1}$

$$\mathfrak{P}'(\;) = \sum_0^\infty c_{n\mu} u^\mu = P(u\pi)$$

Nehmen wir nun $e^{-\mathfrak{P}(u\pi)}$ von n ten Gliede an

so ist ihre Abl $-e^{-\mathfrak{P}} \cdot \mathfrak{P}'(u\pi) = e^{-\mathfrak{P}} \cdot \overline{F}_\mu(u)$

$$F(u\pi) = \frac{G'u}{Gu} = \prod_1^m \mathfrak{E}\left(\frac{u}{a_\nu}, m\right) \cdot e^{-\mathfrak{P}(u\pi)}$$

$F_0 = 0 \qquad e^{-P(0)} = 1$

$Gu = \prod^u \mathfrak{E}\left(\frac{u}{a}, m\right) e^{-\mathfrak{P}(\;)}$

Die Fctn

$$F(u) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{u-a_\nu}\left(\frac{u}{a_\nu}\right)^{m_\nu}$$

mit der Anzahl gegebener Nullstellen wurde in 2 Theile zerlegt.

$$= \sum_1^{n} \frac{1}{u-a_\nu}\left(\frac{u}{a_\nu}\right)^{m_\nu} + \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{u-a}\left(\frac{u}{a}\right)^{m_\nu}$$

Nun ist $\prod E\left(\frac{u}{a}\, m_\nu\right)$

eine Fn. deren erste Ableitung gleich ist den $m+1$ ersten Glieder der obigen Reihe.

$$G(u) = \prod \cdot e^{-\overline{P}(u\,n)}$$

$$\frac{G'u}{G(u)} = \sum_1^{n} \frac{1}{u-a_\nu}\left(\frac{u}{a_\nu}\right)^{n} - \frac{\partial}{\partial x}\overline{P}(u\,n)$$

$$\sum_1 \frac{1}{u-a_\nu}\left(\frac{u}{a_\nu}\right)^{n_\nu} = \sum_{\nu=m+1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{m_\nu+r}\left(\frac{u}{a_\nu}\right)^{m_\nu+r} = \overline{P}(u\,n)$$

$\overline{P}(u\,n)$ muss berechnet werd. könn. für ein gegebenes (u).

$$\overline{P} < \sum_0^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \left|\frac{u}{a_\nu}\right|^{m_\nu+r}$$

wo da alle Glder + die Convergenz eine unbedingte ist. Die Summation i Bz r giebt

$$\sum_0^{\infty} \frac{1}{1-\left|\frac{u}{a_\nu}\right|} \cdot \left|\frac{u}{a_\nu}\right|^{m_\nu+1}$$

welches conv't für $\frac{u}{a_\nu} < g$.

7. Mai '81.

? dendbe $E\left(\frac{u}{a}\, m_\nu\right)$

Gehört die Null selber unter den Nullstellen $a_1 \dots a_n$ so füge man den Factor u^λ hinzu wo λ den Grad des Null-Werdens bedeutet.

$$Gu = u^\lambda \prod_1^m E\left(\frac{u}{a_\nu} \cdot m\right) \cdot e^{-p(u n)}$$

Soll eine Fn überall den Char. einer ration. Fn. haben so ist sie darstellbar, wenn
sie beständig conv. durch eine Pot Reihe
sie sing Stellen hat d. Quot. 2er Pot Reihen.

Eine Fn. welche ein Add. Th. besitzt verhält sich im Endl. wie eine rat. Fn.
und lässt sich darstellen durch eine converg. Pot R. oder als Quot. 2er solchen.

$$\varphi u - b = 0$$

sei lösbar für m Werthe des u, so ist $\varphi u - b'$ lösbar für mindestens ~~$m+1$~~ Werthe wo b' in der Umgebung von b liegt

$$\varphi u - b = 0$$

$$\varphi u_1 - b' = 0$$

$$\varphi u - \varphi u_1 = b - b'$$

Die Entwicklung von diesem fängt an mit

$$c_1 (u - u_1)^{\mu_1} + c_2 (u - u_1)^{\mu_2} + \cdots = b - b'$$

Man div. d. c_1 und ziehe die $\mu_1$te Wurzel

$$(u - u_1) + \frac{c_2}{c_1}(u - u_1)^{\mu_2 - \mu_1} + \cdots = \left(\frac{b' - b}{c}\right)^{\frac{1}{\mu_1}} \quad (A)$$

Daher $$u - u_1 = \left(\frac{b' - b}{c}\right)^{\frac{1}{\mu_1}} \cdot \mathfrak{P}\left(\frac{b' - b}{c}\right)^{\frac{1}{\mu_1}} \quad (B)$$

(b. b')

Man beschr. um b einen klein Kreis so dass jeder Punct des Kreises im Conv. Ber. von (B) liegt: so entspricht jedem b' in diesem Kreis wenigstens 1 Werthe des u. Da nun $\varphi u = b$ ist der Annahme nach für m Werthe des u so ist $\varphi u_1 = b'$ für mindestens m Werthe des u.

In der U Ebene ziehe man einen grossen Kreis, so giebt es Werthe ~~ausser~~ des Kreises für welche $\varphi u = b$

(u_1, u_2, u_3)

Ist $Qu = 0$ nur d. m Werthe des u
überhaupt lösbar so ist sie eine rat. Fu.
Dies as Hülfssatz.

Wir gehen zurück auf eine eindeutige Fᵒ. die ein Add Th. besitzt. Diese lässt sich als Quotient zw. conv. Pot Reihen darstellen. Es sei eine solche Fᵘ φ so besteht $G(\varphi(u+v), \varphi u, \varphi v) = 0$

Dies soll vom Grade n in $\varphi(u+v)$ sein. Man nehme b so dass $\varphi v = b$ für mehr als n versch. Werthe des v. Dies seien $v_1 \cdots v_{n+1}$, so ist

$$G(\varphi(u+v_\nu)\varphi u, b) = 0$$

für $v = v_1 \cdots v_{n+1}$

G kann nicht mehr als n verschiedene Wurzeln $\varphi(u+v_1)$ $\varphi(u+v_2) \cdots \varphi(u+v_{n+1})$
Da aber $\varphi v = b$ für mehr als n Werthe so müssen mindestens 2 von $\varphi(u+v_\nu)$ einand gl. sein.

Denn nehme man allgemein an die Fᵒⁿ $f_1 u, f_2 u \cdots f_{n+1} u$ seien darstellbar d. P.R. und, dass für jeden Werth des u 2 davon einander gl. sind so hat man

$$(f_1 u - f_2)(f_1 - f_3) \cdots (f_1 - f_{n+1}) \cdot (f_2 - f_3)(\quad (f_2 - f_{n+1})$$

$$- - - - - - -$$

so muss dies Prod. oder

$$\prod_{\lambda \lessgtr \mu} (f_\lambda - f_\mu) = 0$$

für jeden Werth des Arguments, und in der Entwick. in PR. müssen alle Coeff. = 0.

Dasselbe gilt wenn die Fu sich as Quot. zeigt. sei, ~~$f_\lambda - f_\mu = \frac{h}{}$~~ $f_\lambda(u) = \frac{g_\lambda u}{h_\lambda u}$

$$f_\lambda - f_\mu = \frac{g_\lambda h_\mu - h_\lambda g_\mu}{h_\lambda h_\mu}$$

das dies $= 0$ wird $g_\lambda h_\mu - h_\lambda g_\mu = 0$

und $\frac{g_\lambda}{h_\lambda} - \frac{g_\mu}{h_\mu} = 0$ QED.

Es muss dann für jedes u

$$\varphi(u + v_\lambda) = \varphi(u + v_\mu)$$

Wir setzen $u = u - v_\mu$

$$\varphi(u + v_\lambda - v_\mu) = \varphi(u)$$

$v_\lambda - v_\mu =$ const $=$ Periode der Function.

Hier aber ist stillschweigend vorausgesetzt worden dass φ = transcendental Fu.

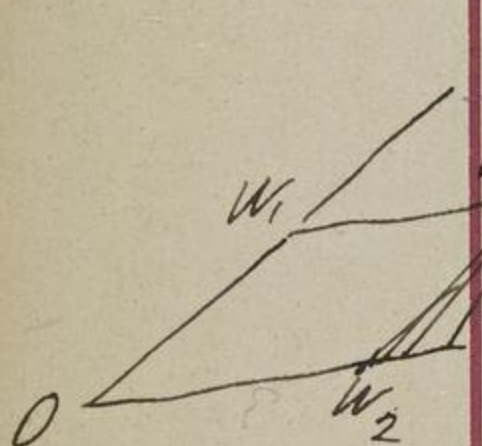
Für die rat. Fr. erfolgt es aber d. Elim.

Die Fr. muss unendl. viele aus dieser abgeleitete Perioden besitzen

$$\varphi(u) = \varphi(u+w) = \varphi(u+2w) \ldots = \varphi(u+mw)$$

Wir nehmen an sie habe auch eine 2te Periode $\varphi(u+\mu' w') = \varphi u$
So mussten viele gelten

$$\varphi(u+\mu w+\mu' w') = \varphi u$$

Hätte sie auch eine 3tte versch. so wäre

$$\varphi(u+\mu w+\mu' w'+\mu'' w'') = \varphi u.$$

105 Unter den Punkten der Ebene, der dem Nullpt. am nächsten steht sei w = eine Periode der Fn., so sind alle andere Perioden die in der Graden von der Nullstelle durch diesen Punkt liegen darstellbar d μw.

Es sei ausser dieser Linie noch andere Periodenpunkte vorhanden, von denen w' der dem Nullpt am nächsten stehe, so kann im $\Delta\ O w_1 w_2$ kein anderer Per. pt. liegen. In einem endl Bezirk können nur endl. Anzahl von Per. pkte liegen.

w_1 w_2 O w_2

Es liegt der Annahme nach kein Pt auf den Rahmen des Parallogramm.

Es liegt auch kein Per. pt. im Innern des Parallgr. denn ziehe $w_1 w_2$

Da $w_1 w_2$ die kleinsten P. sind, so kann kein Pt. im $O w_1 w_2$ sein. Wäre er in $w_1 w_2 w_3$ so wäre er auch der Symmetrie wegen in $\Delta\ O w_1 w_2$.

Alle Vielfache der primit. Periode sind auch P. und es sind alle Per. überhaupt in der Formel enthalten

$$w = \mu w_1 + \nu w_2$$

wo μ & ν ganzzahlig sind.

Analyt. Beweis.

Es sei w' w'' 2 complexe G^{en} deren Verhältniss auch complex ist, so ist jede Periode darstellbar d.

$$u = \alpha w' + \beta w''$$

wo α und β reel sind.

Es sei $$w' = g + hi$$
$$w'' = g' + h'i$$

mit der Annahme $gh' - g'h \gtrless 0$

Sonst wäre $g = mg'$; $h = mh'$.

Es sei $$u = \xi + \eta i$$

so muss $$\xi = \alpha g + \beta g'$$
$$\eta = \alpha h + \beta h'$$

woraus α und β s.d. bestimmt wegen der Annahme. $\alpha = \frac{\begin{vmatrix} \xi & g' \\ \eta & h' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g & g' \\ h & h' \end{vmatrix}}$ $\beta = \frac{\begin{vmatrix} \xi & g \\ \eta & h \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g & g' \\ h & h' \end{vmatrix}}$

Es haben denn w' w'' kein reeles Verhält. &

$$w = \alpha w' + \beta w''$$

Setze man $\beta = 0$ und nenne das kleinste α α' so dass

$$w = \alpha' w'$$

Aehnlich ist β' das kleinste β, so ist die Prim. Periode

$$w = \alpha' w' + \beta' w''.$$

$$w' = \frac{\beta'}{\alpha'} w'' \qquad w'' = \frac{\alpha'}{\beta'} w'$$

$$w = \alpha' w' + \beta' w''$$

α' & β' müssen ganz. Zahlen sein. denn seien μ ν die grössten in ihnen g. Z.

so sei $\quad w = \mu' w' + \nu' w'' + \gamma' w' + \delta' w''$

$$w - \mu w + \nu w'' = \gamma' w' + \delta' w''$$

links ist eine Periode, so muss auch rechts. aber $\gamma' < 1$ $\delta' < 1$ und $\gamma' w' < w''$ $\delta' w' < w^0$ was gegen die Annahme ist da w' w'' die kleinsten Perioden waren.

Ist $\quad \xi_1\ \xi_2$ reel & $\quad 0 < \xi_1 < 1 \quad 0 < \xi_2 < 1$

und $\quad u = \xi_1 w_1 + \xi_2 w_2$

so ist der Inbegriff aller u unter dieser Definition das was man das prim. Perioden Parallelogramm.

Eine gebrochene transcend. Fn $\frac{g_1 u}{g_2 u}$ ist dopp. periodisch und kann im Per. Parall. ∞ oder Null werden und ~~ganz~~ an ∞ vielen Stellen im Ganzen da die Anzahl der Per. Parall eine unendl. ist.

13 Mai
Servatius
der kalte Mann.

Die Fi. nimmt dieselben Werthe an an genau den ~~ganz~~ entsprechenden Stellen in allen Per. Parall. der Ebene. Discutiren wir also das eine prim. Per Parall so können wir alle andern davon sehen.

Es seien $u_1 \dots u_\nu$ die Nullstellen einer solchen Fi. so kann man ein Fi. herstellen mit diesen und keine andern 0 Stellen. Eine solche Fi. ist

$$\sigma(u)$$

$$= u\prod{}'(1-\frac{u}{w})e^{\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}} = u\prod{}''(1-\frac{u^2}{w^2})e^{\frac{u^2}{w^2}}$$

$$= u(1 + * - \frac{1}{2}\sum{}''\frac{1}{w^4}u^4 - \frac{1}{3}\sum{}''\frac{1}{w^6}u^6 - \cdots)$$

$$= u + * - \frac{1}{4}\sum{}'\frac{1}{w^4}u^5 - \frac{1}{6}\sum{}'\frac{1}{w^6}u^7 - \cdots$$

Tafel 1

Denn $\sigma(u-u_1)$ ist eine Fi. mit ~~der~~ 0 stelle $u_1 + w$. $\sigma(u-u_1)\sigma(u-u_2)\cdots\sigma(u-u_\nu)$ eine Fi. mit den Nullstellen $u, u_1 \cdots u_\nu$.

$$\frac{g_1 u}{g_2 u} = \frac{e^{g_3} \cdot \sigma(u-u_1)\sigma(u-u_2)\cdots}{e^{g_4} \cdot \sigma(u-v_1)\sigma(u-v_2)\cdots} \qquad e^{g(0)} = 1$$

$$\varphi u = C\, e^{g_0(u)} \frac{\sigma(u-u_1)\sigma(u-u_2)\cdots}{\sigma(u-v_1)\sigma(u-v_2)\cdots}$$

wo von den Nullstellen die Null selber ausgeschossen wird.

Zu der Reihe $a_1\ a_2\ a_3 \cdots a_n$
wird die R. zugeordnet $m_1\ m_2 \cdots m_n$
unter den Bedingungen gen dass die Summe

$$\sum_\nu \left|\frac{u}{a_\nu}\right|^{m_\nu+1}$$

endlich bleiben soll ($a = 0$ ausgeschlossen) für jedes ν. Man nehme alle m_ν einander gleich $\delta = 2$ so wird die R.

$$\sum_\nu \left|\frac{u}{a_\nu}\right|^3$$

$$= u^3 \sum_\nu \left|\frac{1}{w_\nu}\right|^3 \qquad w = v \cdot r$$

da u keinen Einfluss auf die Summierbarkeit hat solange ~~$u \gtrless 0$~~ $u =$ endl.

Wir betrachten alle Werthe des w_ν wo

maximum $|V|$ und $|V'| = \pi = 1, 2, 3, 4 \cdots$

So giebt es von v $2\pi+1$ Werthe

v' $2\pi+1$ "

deren Combinationen $(2\pi+1)^2$

$$\frac{1}{|w|^{m+1}} = \frac{1}{x^{m+1}} \cdot \frac{1}{|v|^{m+1}}$$

$$w = 2v\omega + 2v'\omega'$$

Da v von $-r$ bis $+r$ incl. läuft so ~~ist~~ ist
die Anzahl mögl. Werthe $2n+1$
Diese Anzahl combinirt mit der gl. Anzahl
für v' giebt $(2n+1)^2$
als die Anzahl der mögl. Combinationen.
Die Anzahl von Werthen des v die kleiner
als r sind ist $2r-1$, auch für v'
Die Combinationen dieser $(2r-1)^2$
Die Diff. giebt an die Anzahl der Combin.
wo v und $v = r$ sind, näml

$$(2r+1)^2 - (2r-1)^2 = 8r$$

Wir untersuchen dann die Convergenz
von $\Sigma\left(\frac{1}{w}\right)^3$
wo $w = v \cdot r$, und wo r = der Max. werth
des w nur höchstens 8 mal angenommen
wird. Wir setzen diese 8 mal ausserhalb;
dann wird

$$\Sigma\left(\frac{1}{w}\right)^3 \leqq \frac{8}{K^3} \cdot \sum_1^\infty \frac{1}{r^2}$$

Der Ausd. rechts convergirt. Q. E. D.

$$\left(\begin{array}{l|l} r=0 & \sum^{0}\left(\frac{1}{w}\right)^3 \leq \frac{1}{K^3}\frac{8}{r^2} \\ \text{"}\ 1 & \sum^{(1)}\left(\frac{1}{w}\right)^3 \leqq \frac{1}{K^3} \\ \text{"}\ 2 & \sum^{(2)}\left(\frac{1}{w}\right)^3 \leqq \frac{1}{K^3}\left(\frac{8}{1}+\frac{8}{4}\right) \quad \ldots \sum^{\infty} \leqq \frac{8}{K^3}\cdot\sum\frac{1}{r^2} \end{array}\right)$$

$\sum \left(\frac{u}{a_\nu}\right)^{m_\nu+1}$ = endlich für jedes u.

$$\sum_0^\infty \frac{u^n}{n!} = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \cdots = e^u$$

$$\sum_0^\infty \frac{u^n}{w^n \cdot n!} = e^{\frac{u}{w}}$$

$$\sum \frac{u^n}{w^n \cdot n!} \cdot \sum \frac{u^{2n}}{(2w)^{2n}\, n!} \cdot \sum \frac{u^{3n}}{(2\cdot 3\cdot w)^{3n}\, n!} \cdots = e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2} + \frac{1}{2\cdot 3}\frac{u^3}{w^3} + \cdots}$$

~~Π_w~~ $$\sum \frac{1}{n!}\cdot\left(\frac{u}{2w}\right)^{2n} = e^{\frac{u^2}{2w^2}}$$

$$\sum \frac{1}{n!}\left(\frac{u}{2\cdot 3 w}\right)^{3n} = e^{\frac{u^3}{2\cdot 3\cdot w^3}}$$

$$\sum \frac{1}{n!}\left(\frac{u}{w\cdot \nu!}\right)^{\nu n} = e^{\frac{u^\nu}{w^\nu \cdot \nu!}}$$

$$\prod \cdot \sum_{\nu=1}^\infty \frac{1}{n!}\cdot\left(\frac{u}{\nu!\cdot w}\right)^{\nu n} = e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\cdot\frac{u^2}{w^2} + \frac{1}{3}\frac{u^3}{w^3} + \cdots \frac{1}{m}\frac{u^m}{w^m}}$$

$$f = e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2} + \cdots \frac{1}{m}\frac{u^m}{w^m}}$$

$$f' = \left(\frac{1}{w} + \frac{u}{w^2} + \cdots \frac{u^{m-1}}{w^m}\right) e^{\frac{u}{w} + \cdots + \frac{1}{m}\frac{u^m}{w^m}}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(1 - \frac{u}{w}\right) f = \frac{\partial}{\partial u}\left(f - \frac{u}{w} f\right) = f' - f'\frac{u}{w} - f\frac{1}{w}$$

~~$= f'\left(1 - \frac{u}{w} \frac{1}{w}\right) = \left(\frac{w-u}{w}\right) f'$~~

$$= f'\left(1 - \frac{u}{w}\right) - f\frac{1}{w}.$$

$$f' = \left(\frac{1}{w} + \frac{u}{w^2} + \cdots \frac{u^{m-1}}{w^m}\right) e^{\cdots}$$

$$+ f'\frac{u}{w} = \left(\frac{u}{w^2} + \cdots \frac{u^{m-1}}{w^{m-1}} + \frac{u^m}{w^{m+1}}\right) \cdot e^{\cdots}$$

$$f' - f'\frac{u}{w} = \left(\frac{1}{w} - \frac{u^m}{w^{m+1}}\right) e'' = \frac{1}{w} e'' - \frac{u^m}{w^{m+1}} e''$$

$\frac{\partial}{\partial u}(1-\frac{u}{w})f = \quad f' - f'\frac{u}{w} - f\frac{1}{w}$

$$f' - f'\frac{u}{w} = \frac{1}{w}e^{(\,)} - \frac{u^m}{w^{m+1}}e^{(\,)}$$

$$f\frac{1}{w} = \frac{1}{w}e^{(\,)}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}(1-\frac{u}{w})f = -\frac{u^m}{w^{m+1}}e^{(\,)}$$

$$\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w} + \cdots \frac{1}{m}\frac{u^m}{w^m} = z$$

für $w=1 \qquad = u + \frac{u^2}{2} + \cdots + \frac{u^m}{m} = k$

$$\frac{\partial k}{\partial u} = 1 + u + u^2 + \cdots + u^{m-1} = \frac{1}{1-u^m} - \frac{1}{u^{m-1}} = \frac{u^m-1}{u-1}$$

für $w=2$

$$z = \frac{u}{2} + \frac{u^2}{2\cdot 4} + \frac{u^3}{3\cdot 8} + \cdots \frac{u^m}{m\cdot 2^m}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\left(\frac{u}{2}\right)^{m-1} - 1}{\frac{u}{2} - 1}$$

für $w=3 \quad z = \frac{u}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{u}{3}\right)^3 + \cdots \frac{1}{m}\left(\frac{u}{3}\right)^m$ &c.

$$\frac{\partial}{\partial u}(1-\frac{u}{w})e^{(\,)} = -\frac{u^m}{w^{m+1}}e^{(\,)} = f'$$

$$\frac{f'}{f} = \frac{-\frac{u^m}{w^{m+1}}}{1-\frac{u}{w}} = \frac{-\frac{u^m}{w^m}}{w-u} = \frac{u^m}{w^m(u-w)}$$

$$\frac{f'}{f} = \frac{1}{u-w}\cdot\frac{u^m}{w^m} = \text{lg. Ableit.}$$

Die Funct. selber muss sein

$$(1-\frac{u}{w})e^{\frac{u}{w} + \frac{u^2}{2\cdot w^2} + \cdots \frac{1}{m}\frac{u^m}{w^m}}$$

Ist dann $\quad g = \prod(1-\frac{u}{w})e^{\frac{u}{w}+\cdots}$

so ist $\quad \frac{g'}{g} = \sum_{w=1}^{\infty}\left(\frac{1}{u-w}\right)\frac{u^m}{w^m}$.

$$f = \left(1-\frac{u}{w}\right) e^{\sum_1^m \frac{1}{n}\cdot\frac{u^n}{w^n}}$$

$$\frac{f'}{f} = \frac{1}{u-w}\cdot\frac{u^m}{w^m}$$

$$\sigma u = u\cdot\prod\left(1-\frac{u}{w}\right) e^{\sum_1^m \frac{1}{n}\frac{u^n}{w^n}}$$

$$\log \sigma u = l.u + l.\sum l\left(1-\frac{u}{w}\right) e^{\Sigma}.$$

$$\frac{\sigma' u}{\sigma u} = \frac{1}{u} + \sum{}' \frac{1}{u-w}\cdot\frac{u^m}{w^m} \qquad w \gtrless 0.$$

Es wird dann $m = 2$ gesetzt aber warum weiss der Prof.

$$\frac{\sigma' u}{\sigma u} = \frac{1}{u} + \sum{}'\left(\frac{1}{u-w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2}\right) \qquad w \gtrless 0.$$

$$\varphi(u) = C e^{g_0} \frac{\sigma(u-u_1)\,\sigma(u-u_2)\cdots\sigma(u-u_n)}{\sigma(u-v_1)\cdots\cdots\sigma(u-v_n)}$$

weil die Anzahl der 0Stellen gl. ist der Anzahl der ∞ Stellen.

$$\sigma u = u \prod \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{u^2}{2w^2}} \qquad \text{weil } m = 2.$$

14. Mai. Sonnabend.

$$w = 2\nu\omega + 2\nu'\omega' \qquad \nu, \nu' \gtrless 0, \ -\infty \quad +\infty.$$

Dies entspringt aus

$$\frac{\sigma' u}{\sigma u} = \frac{1}{u} + \sum{}' \left(\frac{1}{u-w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2}\right) \qquad A$$

Setzt man $-\nu$ & $-\nu'$ statt ν ν' dh $-w$ statt $+w$, so wie aus $\sigma u = u \prod$ zu ersehen ist, ist σu eine ungerade Funct.

$$\sigma(-u) = -\sigma(u)$$

Auch ist $\frac{\sigma' u}{\sigma u}$ ungerade, weil der Zähler ger. ist.

$$\frac{1}{u-w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2} = -\frac{u}{w^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{u}{w}}$$

Dies entwickelt giebt

$$\frac{\sigma' u}{\sigma u} = -\sum \left(\frac{u}{w^2} + \frac{u^2}{w^3} + \frac{u^3}{w^4} + \cdots \right) + \frac{1}{u}$$

$$\sum \frac{1}{w} = c_\nu$$

Es bleiben also $+\sum \frac{1}{u-w}$ und $+\sum \frac{u}{w^2}$

Aus A.

$$\frac{1}{u-w} = -\frac{1}{w} - \frac{u}{w^2} - \frac{u^2}{w^3} - \frac{u^3}{w^4} - \frac{u^4}{w^5} -$$

$$\frac{1}{w} = +\frac{1}{w}$$

$$\frac{u}{w^2} = \frac{u}{w^2}$$

$$\frac{\sigma' u}{\sigma u} = -\sum \left(\frac{u^2}{w^3} + \frac{u^3}{w^4} + \frac{u^4}{w^5} + \frac{u^5}{w^6} + \cdots \right) + \frac{1}{u}$$

Da aber $\frac{\sigma' u}{\sigma u}$ ungerade ist, so fehlen die geraden Potenzen

$$\frac{\sigma' u}{\sigma u} = -u^3 \sum \frac{1}{w^4} - u^5 \sum \frac{1}{w^6}$$

Da wieder $\frac{\sigma'}{\sigma}u$ ungerade ist,

$$\frac{\sigma' u}{\sigma u} = \frac{1}{u} - \sum_1^\infty c_\nu u^{2\nu+1}$$

$$\sigma u = u \cdot e^{-\sum_1^\infty c_\nu \frac{u^{2\nu+2}}{2\nu+2}}$$

$$= u\left(1 - \frac{c_1}{4} u^4 - \frac{c_2}{6} u^6 - \cdots\right)$$

wo $\left(\frac{1}{w}\right)^4 = c_1 \quad \left(\frac{1}{w}\right)^6 = c_2$ &c.

Die übrigen Glieder sind durch eine Diffgl. mit bestimmt, näml.

$$\sigma' u = \sigma u \cdot e^{gu}.$$

Um gu zu bestimmen, hat man

$$\frac{\sigma'(u+2w)}{\sigma(u+2w)} - \frac{\sigma' u}{\sigma u} = g' u$$

$$\frac{d}{du} \cdot \frac{\sigma' u}{\sigma u} = \wp(u)$$

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \sum \left(\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right) \qquad u \gtrless 0.$$

$$\wp v = \frac{1}{v^2} + \sum \left(\frac{1}{(v-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right)$$

$$\wp u - \wp v = \sum \left(\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{(v-w)^2}\right)$$

$$\wp(u+2w) - \wp(v+2w) = \sum \left(\frac{1}{(u-w+2w)^2} - \frac{1}{(v-w+2w)^2}\right)$$

$$\wp(u+2w) - \wp(v+2w) = \wp u \cdot \wp v$$

$$\wp(u+2\omega) - \wp u = \wp(v+2\omega) - \wp v$$

$$\wp(-u) = +\wp u$$

Setze man $v = -\omega$

$$\left.\begin{aligned}\wp(u+2\omega) &= \wp u\\ \wp(u+2\omega') &= \wp u\end{aligned}\right\}$$

und $\wp u$ ist dopp. periodisch.

Nun war

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(u+2\omega) - \frac{\sigma'}{\sigma}u = g'(u) \; ; \qquad A$$

daher

$$-\wp(u+2\omega) + \wp u = g''(u) = 0$$

$$g'u = \text{const}$$

$$gu = \text{lineare Fct. in } u.$$

$$\log.\sigma(u+2\omega) - \log\sigma(u) = gu$$

$$= \log\frac{\sigma(u+2\omega)}{\sigma u}$$

$$\frac{\sigma(u+2\omega)}{\sigma u} = e^{g(u)} = Ce^{cu} \qquad B$$

$u = 0$

$$2\frac{\sigma'\omega}{\sigma\omega} = c \qquad \frac{\sigma'\omega}{\sigma\omega} = \eta$$

$$\frac{\sigma'\omega'}{\sigma\omega'} = \eta'$$

In B setze man $u = -\omega$

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(\omega) - \frac{\sigma'}{\sigma}(-\omega) = \frac{\sigma'}{\sigma}(\omega) + \frac{\sigma'}{\sigma}(\omega) = 2\frac{\sigma'}{\sigma}\omega = c = 2\eta$$

$$\frac{\sigma(\omega)}{\sigma(-\omega)} = -1 = C\cdot e^{-c\omega} = C\cdot e^{-2\eta\omega}$$

$$C = -e^{2\eta\omega}$$

Aus B

$$\sigma(u+2\omega) = -\sigma(u)\cdot e^{2\eta(u+\omega)}$$

$$\sigma(u+2\omega) = -\sigma u \cdot e^{2\eta(u+\omega)}$$

$$\sigma(u+2\omega') = -\sigma u \cdot e^{2\eta'(u+\omega')}$$

17 Mai

Dienstag.

$$\varphi u = C \cdot e^{cu} \frac{\sigma(u-u_1)\sigma(u-u_2)\cdots\sigma(u-u_n)}{\sigma(u-v_1)\sigma(u-v_2)\cdots\sigma(u-v_n)}$$

ist eine dopp. per. Funct. wenn $c=0$ und wenn $\Sigma u_\alpha = \Sigma v_\alpha \quad \alpha = 1 \cdots n.$

Denn wenn

$$\sigma(u+2\omega-u_1) = -\sigma(u-u_1)\, e^{2\eta(u+\omega-u_1)}$$

so ist

$$\varphi(u+2\omega) = \varphi u \cdot e^{\sum_1^n 2\eta(u-u_\alpha+\omega) - 2\eta(u-v_\alpha+\omega)}$$

und dies, da $\Sigma u_\alpha = \Sigma v_\alpha$ ist $= \varphi u\, e^0 = \varphi u$

~~$\sigma(u+2\omega-u_1) =$~~

$$\varphi(u+2\omega) = \varphi u \qquad \text{Q.E.D.}$$

Giebt es nun eine zweite Fu. mit denselben Null- und ∞ Stellen mit Ausnahme von einer der ∞, so sei es

$$\varphi_1(u) = C_1 e^{cu} \frac{\sigma(u-u_1)\cdots\sigma(u-u_n')}{\sigma(u-v_1)\cdots\sigma(u-v_n)}$$

Man divid.

$$\frac{\varphi_1 u}{\varphi u} = \frac{C_1}{C} \frac{\sigma(u-u_n')}{\sigma(u-u_n)} e^{cu}$$

und da dies eingliedrig ist so ist es eine Constante, und φ & φ_1 unterscheiden sich nur d. einen const. Fact.

Der allgemeinste Ausdruck für eine doppelt-periodische Function ist dann

$$\varphi u = C \cdot e^{cu} \frac{\sigma(u-u_1)\sigma(u-u_2)\cdots\sigma(u-u_n)}{\sigma(u-v_1)\sigma(u-v_2)\cdots\sigma(u-v_n)}.$$

Wir untersuchen jetzt ob zw. $\varphi u{+}v$ φu φv eine algebr. Gl. besteht.

$$\wp u - \wp v = C \frac{\sigma(u-v)\,\sigma(u+v)}{\sigma^2 u\, \sigma^2 v}$$

Denn $\wp v$ hat eine [illegible]stelle in dem Nullpunkt die 2mal zu zählen ist, σu dagegen eine ∞ Stelle in Opt die einfach zu zählen ist. Für $u=v$ wird links $=0$ und auch rechts. Für $u=-v$ da $\wp(-u) = +\wp u$, wird l. & r $=0$. Andere ∞ und 0 stelle hat jeder Ausd. nit; sie stimmen überein bis auf eine Const C.

$$\wp'(u+\omega) = \wp'(u-\omega) \qquad u=0$$
$$\wp'(\omega) = \wp'(-\omega)$$

Da aber $\wp'$ eine ungerade Funct. ist muss

$$\wp'\omega = 0$$

und $\wp'(u)$ hat eine Nullstelle bei $u = \pm\omega$ und auch eine 2te bei $u = \pm\omega'$

$$\wp'(u) = C \frac{\sigma(u-\omega)\sigma(u-\omega')\sigma(u+\omega)\sigma(u+\omega')}{\sigma^3(u)}.$$

Um C zu bestim. entwick. nach u

$$\wp' u = -2\frac{1}{u^3} + \cdots = C\frac{\sigma\omega\,\sigma\omega'\,\sigma(\omega+\omega')}{\sigma^3 u\,\sigma\omega}$$

$$\wp' u = \frac{-2\,\sigma(u-\omega)\,\sigma(u-\omega')\,\sigma(u+\omega+\omega')}{\sigma^3 u\;\sigma\omega\,\sigma\omega'\,\sigma\omega+\omega'}$$

$$= \frac{2\,\sigma(u+\omega)\,\sigma(u+\omega')\,\sigma(u+\omega+\omega')}{\sigma^3 u\,\sigma\omega\,\sigma\omega'\,\sigma\omega+\omega'}.$$

$$\wp u - \wp v = \frac{\sigma(v-u)\,\sigma(v-u)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 v}$$

$$\left(\frac{d\wp u}{du}\right)^2 = (\wp' u)^2 = \frac{4\,\sigma(u-\omega)\,\sigma(u+\omega)}{\sigma^2 u\,\sigma^2\omega}\cdot\frac{\sigma(u-\omega')\,\sigma(u+\omega')}{\sigma^2 u\,\sigma^2\omega'}\cdot\frac{\sigma(u-\omega-\omega')\,\sigma(u+\omega+\omega')}{\sigma^2 u\,\sigma^2(\omega+\omega')}.$$

$$\left(\frac{d\wp u}{du}\right)^2 = (\wp' u)^2 = 4(\wp u - \wp\omega)(\wp u - \wp\omega')(\wp u - \wp(\omega+\omega'))$$

= ganze Fu. 3ter Grades, mit den Wz.

$u = \omega \quad u = \omega' \quad u = \omega+\omega'$

$\wp\omega = e_1 \quad \wp\omega_2' = e_2 \quad \wp\omega' = e_3$

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3).$$

$$= 4(s^3 - s^2(e_1+e_2+e_3) + s(e_2e_3 + e_3e_1 + e_1e_2) - e_1e_2e_3.$$

Und indem man $e_1 + e_2 + e_3 = 0$

$$4(e_2e_3 + e_3e_1 + e_1e_2) = g_2$$

$$4(e_1e_2e_3) = g_3$$

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3$$

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3 = A^2$$

$$\frac{d}{2du}\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 6s^2 - \frac{1}{2}g_2$$

Jede ungrade Ableitung von $\frac{ds}{du}$ ausser der ersten ist eine ganze Fn. von s und Ableitungen niedrigeren Grades.

$$\frac{ds}{~~du~~} \cdot \frac{d^2s}{du^2} = 6s^2 + \frac{1}{2}g_2$$

$$\frac{d^{(2n)}s}{du^{2n}} = G_n(s)$$

$$\frac{d^{2n+1}s}{du^{2n+1}} = G_n'(s)\frac{ds}{du}$$

$$\frac{d^{2n+2}}{du^{2n+2}} = G_n''(s)\left(\frac{ds}{du}\right)^2 + G_n'\frac{d^2s}{du^2} = G_{n+1}(s).$$

$$\frac{d^2s}{du^2} = \frac{6s^2 - \frac{1}{2}g_2}{~~A~~}$$

$$\frac{d^3s}{du^3} = \frac{12sA - 6s^2 A'}{~~A^2~~}$$

$$\frac{d^4s}{du^4} = \frac{(12A + 12sA' - 12sA' - 6s^2A'')A^2 - 24sA^2A' + 12s^2A'^2}{~~A^4~~}$$

sondern ist eine ganze Fn.

18. Mai

Es ist nun zu zeigen dass $\left(\frac{ds}{du}\right)^2$ ein Add. Theorem besitzt.

Dazu ist erstens nachzuweisen dass jede dopp. per. Fct. ausdrückbar ist d. $\wp u$ $\wp' u$ und zweitens dann wird $\varphi(u+v) = R(\wp u, \wp v, \wp' u, \wp' v)$.

Jede dopp. per. Fct. ist darstellbar durch

$$\varphi(u) = \frac{\sigma(u-u_1)\,\sigma(u-u_2)\,\cdots}{\sigma(u-v_1)\,\sigma(u-v_2)\,\cdots}$$

Diese ist rat. ausdrückbar d. $\wp u$ $\wp' u$, denn

$$\frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 v} = \wp u - \wp v$$

Dies nach u differentiirt giebt

$$\frac{\left(\sigma'(u+v)\cdot\sigma(u-v) + \sigma(u+v)\sigma'(u-v)\right)\sigma^2 u\,\sigma^2 v - \sigma(u+v)\,\sigma(u-v)\left\{2\sigma u\,\sigma' u\,\sigma^2 v + \right.}{\sigma^4 u\,\sigma^4 v.}$$

$$= \frac{\sigma'(u+v)\,\sigma(u-v) + \sigma(u+v)\,\sigma'(u-v)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 v} - \frac{2\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)\,\sigma' u}{\sigma u} = \wp'(u).$$

Logarith. diff. giebt es

$$\frac{\left(\sigma'(u+v)\,\sigma(u-v) + \sigma(u+v)\,\sigma'(u-v)\right)\sigma^2 u\,\sigma^2 v - \sigma(u+v)\,\sigma(u-v)\,2\cdot\sigma u\,\sigma' u\,\sigma^2 v}{\sigma^4 u\,\sigma^2 v \quad \sigma(u+v)\cdot\sigma(u-v)}$$

$$= -\frac{2\sigma' u}{\sigma u} + \frac{\sigma'(u+v)\,\sigma(u-v) + \sigma(u+v)\,\sigma'(u-v)}{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}$$

$$= \frac{\sigma'(u+v)}{\sigma(u+v)} + \frac{\sigma'(u-v)}{\sigma(u-v)} - \frac{2\sigma' u}{\sigma u} = \frac{\wp' u}{\wp u - \wp v}$$

Und nach v diff. ergiebt sich ähnlich

$$\frac{\sigma' u+v}{\sigma u+v} - \frac{\sigma' u-v}{\sigma(u-v)} - 2\cdot\frac{\sigma' v}{\sigma v} = -\frac{\wp' v}{\wp u - \wp v} \qquad (A)$$

Dies noch 'mal nach v diff.

$$\frac{\partial^2}{\partial v^2} = \frac{\sigma''(u+v)}{\sigma(u+v)} - \left(\frac{\sigma'(u+v)}{\sigma(u+v)}\right)^2 + \frac{\sigma''(u-v)}{\sigma(u-v)} - \left(\frac{\sigma' u-v}{\sigma u-v}\right)^2 - 2\left\{\frac{\sigma'' v}{\sigma v} - \left(\frac{\sigma' v}{\sigma v}\right)^2\right\}$$

$$= -\frac{\wp'' v(\wp u - \wp v) - \wp' v^2}{(\wp u - \wp v)^2}$$

Die zweite logarith. Ableitung des (A) giebt da $\frac{\partial^2}{\partial}\log\sigma = \wp u$.

$$\wp(u+v) - \wp(u-v) = 2\wp(v) - \frac{\wp''(v)(\wp u - \wp v) - \wp'(v)^2}{(\wp u - \wp v)\,\wp' v}$$

$$\begin{cases} \wp(u+v) - \wp(u-v) = 2\wp v - \dfrac{\wp'' v}{\wp' v} + \dfrac{\wp' v}{\wp u - \wp v} \\[2ex] \wp(u+v) + \wp(u-v) = 2\wp u - \dfrac{\wp' u}{\wp u - \wp u} + \dfrac{\wp'' u}{\wp u}. \end{cases}$$

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4(\wp u)^3 - g_2\cdot\wp u - g_3.$$

Durch Addition

$$~~2~~\wp(u+v) = ~~2~~\wp u + 2\wp v - \frac{\wp' u}{\wp u - \wp v} + \frac{\wp' v}{\wp u - \wp v} + \frac{\wp'' u}{\wp u} - \frac{\wp'' v}{\wp v}$$

$$-6\wp u^3 + g_2\wp u^2 + 6\wp v\,\wp u^2 - \tfrac{1}{2}g_2\wp u\,\wp v = (\;)^2$$

"

$$= 6\wp v\,\wp u^2 + 2\wp v^2\wp u - \tfrac{1}{2}g_2(\wp u + \wp v) - g_3$$

Dies geht über in die Ableit. wenn $u = v$.

20.

$$\wp(u+v) = \frac{s + s_1(s+s_1) - \frac{1}{2}g_2(s+s_1) - g_3 - s's_1'}{2(s-s_1)^2}$$

$$\wp(u-v) = \frac{s + s_1(s+s_1) - \frac{1}{2}g_2(s+s_1) - g_3 + s's_1'}{2(s-s_1)^2}$$

Allgem.

$$R(x) = Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4B'x + A'$$

$$R(x_1) = Ax_1^4 +$$

$$R(xx_1) = Ax_1^2x^2 + 2Bxx_1(x+x_1) + 6Cxx_1 + 2B'(x+x_1) + A'.$$

$$\frac{\partial R(xx_1)}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}R(x).$$

$$R^2(x\cdot x_1) - Rx\cdot Rx_1 = 0 \qquad x = x_1$$

Fehlt das const Gld. so ist diese letzt Fi. d. $x-x_1$ theilbar.

$$R^2(xx_1) - Rx\cdot Rx_1 = (x-x_1)\frac{1}{R(x-x_1)}$$

$$\overline{R}(xx_1) = (B^2 - AC)x^2x_1^2 + (BC - AB')xx_1(x-x_1)$$
$$+ \tfrac{1}{2}(C^2 - AA')(x+x_1)^2 + 2(C^2 - BB') + (B'C - A'B)(x+x_1)$$
$$- B'^2 - B'C$$

Bei unserer Gl. $4s^3 - g_2s - g_3$ ist $A=0$ $C=0$ $B=1$ $B' = -\frac{1}{4}g_2$ $A' = -g_3$.

$$\overline{R}(ss_1) = s^2s_1^2 - \frac{1}{2}g_2ss_1 + g_3(s+s_1) + \frac{1}{4}g_2^2$$

$$= (ss_1 + \tfrac{1}{4}g_2)^2 + g_3(s+s_1)$$

$$\wp(u-v) - \wp(u+v) = \frac{(Rss')^2 - Rs\cdot Rs_1}{4(s-s_1)^2}$$

welches analog. ist mit

$$\wp(u+v) = \frac{(ss_1 - \frac{1}{4}g_2)^2 + g_3(s+s_1)}{4ss_1(s+s_1) - g_2(s+s_1) - 2g_3 + 2s's_1'}$$

$$\wp(2u) = \frac{(s^2 - \frac{1}{4}g_2)^2 + 2g_3 s}{4s^3 - g_2 s - g_3}$$

$$(\wp u - \wp v) = \frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 v.}$$

Eine ellipt. F.. mit den 3 Nullstellen

u_1, u_1+u_2 $-u_1-u_2$ ist

$$(M) \qquad \frac{\sigma(u+u_1+u_2)\,\sigma(u-u_1)\,\sigma(u-u_2)}{\sigma u^3}$$

und sie hat eine ∞ Stelle bei $u=0$ dritten Grades.

Bilden wir nun

$$A + B\wp u + C\wp' u$$

wo $\wp u = \frac{1}{u^2} + \mathfrak{P}(u)$ $\wp' u = -\frac{2}{u^3} + \mathfrak{P}(u)$, .

so hat auch diese Fn eine ∞ Stelle 3ten Grades.

$$(A + B\wp u + C\wp' u)(A + B\wp u_1 + C\wp' u_1)(A + B\wp u_2 + C\wp' u_2)$$

Die Determ.

$$C \begin{vmatrix} 1 & \wp u & \wp' u \\ 1 & \wp u_1 & \wp' u_1 \\ 1 & \wp u_2 & \wp' u_2 \end{vmatrix}$$

hat dieselben 0 und ∞ Stellen wie (M)

und ist daher mit ihr bis auf eine Const. identisch

$$\begin{vmatrix} 1 & \wp u & \wp' u \\ 1 & \wp u_1 & \wp' u_1 \\ 1 & \wp u_2 & \wp' u_2 \end{vmatrix} = (\wp u_1 \cdot \wp' u_2 - \wp' u_1 \wp u_2) + (\wp u_2 \wp' u + \wp' u_2 \wp u) + (\wp u \wp' u_1 - \wp' u \wp u_1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \wp u \\ 1 & \wp u_1 \end{vmatrix} = \wp u_1 - \wp u = \frac{\sigma(u+u_1)\cdot\sigma(u-u_1)}{\sigma^2 u \, \sigma^2 u_1}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \wp u & \wp' u \\ 1 & \wp u_1 & \wp' u_1 \\ 1 & \wp u_2 & \wp' u_2 \end{vmatrix} = \wp' u \begin{vmatrix} 1 & \wp u_1 \\ 1 & \wp u_2 \end{vmatrix} - \wp' u_1 \begin{vmatrix} 1 & \wp u_2 \\ 1 & \wp u \end{vmatrix} + \wp' u_2 \begin{vmatrix} 1 & \wp u \\ 1 & \wp u_1 \end{vmatrix}$$

&c = &c

Im Allgemeinen

$$\frac{\sigma(u+u_1+\dots+u_n)\,\sigma(u-u_1)\cdots\sigma(u-u_n)}{\sigma^{n+1}(u)\,\sigma^{n+1}u_1\cdots\sigma^{n+1}u_n} =$$

$$= A_0 + A_1 \wp u + A_2 \wp' u + \cdots A_n \wp^{(n-1)}(u),$$

und φu ist linear d. $\wp u$ & ihre Ableitungen ausdruckbar.

Wenn mehrere u_α einand. gl. sind, so hat φu die Form
$$\varphi = \frac{\sigma^{\lambda_1}(u-u_1)\,\sigma^{\lambda_2}(u-u_2)\cdots\sigma^{\lambda_\mu}(u-u_\mu)\,\sigma(u-u_{\mu+1})}{\sigma^{\mu+1}u}$$

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \mathfrak{P}(u)$$

$$\wp^{(\mu-1)}(u) = (-1)^{\mu-1}\mu!\,u^{-(\mu+1)} + \mathfrak{P}(u).$$

und hat also wie φu eine ∞ Stelle bei $u=0$.

$$\varphi = \frac{g(\wp u) + g_1(\wp u)\wp' u}{g_2(\wp u) + g_3(\wp u)\wp' u} = R(\wp u, \wp' u)$$

Es ist dann aus
$$\varphi u = R(\wp u\ \wp' u)$$
zu beweisen dass
$$\wp u \text{ und } \wp' u = R(\varphi u\ \varphi' u).$$

Dazu nehme man ein bestimmt u_1
$$x = \varphi(u_1)$$
$$y = \varphi'(u_1)$$
so dass x = algebr. Fu. (y).
und statt x setze man

(a) $x = R(st)$ (b) $t^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3$

(c) $y = R_1(st)$

so ist aus (a) (b) (c) das s und t zu bestimmen. Wir fragen zunächst ob es mehrere Werthe Paare s, t, giebt welche (a) u (c) befriedigen.

Giebt es nur eines, so ist
$$s = R(x)$$
$$t = R(x)$$
Giebt es 2 Werthe-Paare
$$s_1 = \wp u_1 \qquad t_1 = \wp'(u_1)$$
$$s_2 = \wp u_1 \qquad t_2 = \wp'(u_1)$$
so kann man solch einen Argumentwerth u_2 finden dass
$$s_2 = \wp u_2 \qquad t_2 = -\wp' u_2$$
Dazu nehme man u_2 = congruent Werth von u_1
so wird $s_1 = s_2 \gtrless 0$ $t_1 = t_2 \gtrless 0$.

Man setze $\varphi u'' = R(\wp u'' \wp' u'') = \varphi u'$

(B) $\varphi' u'' = \varphi' u'$

Wenn also $x = R(st)$ $y = R_1(st)$
für 2 Werthepaare befriedigt werden, so bestehen (B)

Wenn $u_1 u_2$ nicht conjugirt sind so ist $u_2 - u_1$ eine Periode. und

$$s_1 = s_2 \qquad t_1 = t_2 .$$

und es besteht

$$g(\varphi u \; \varphi' u) = 0$$

Daraus können wir die Abl. bilden

$$g_1(\varphi' u \; \varphi'' u) = 0$$

und aus g & g_1

$$\varphi'' u = - \frac{g_1 \varphi' u}{g_2 \varphi u}$$

Was die Ausdruckbarkeit der höheren Abl. d. $\varphi u \; \varphi' u$ anbetrifft, so ist

$$\varphi^{(\nu+1)} u = \frac{G_{\nu+1} u}{G_2^{2\nu-1} u}$$

denn

$$\varphi^{\nu+2} u = \frac{G'_{\nu+1} \cdot \varphi' u + G''_{\nu+1} \varphi'' u}{G_2^{2\nu-1}} - 2\nu \frac{G_{\nu+1}}{G_2^{2\nu}} \cdot$$

$$\cdot \left(G_2^{(1)} \varphi' u + G_2^{(11)} \varphi'' \right)$$

d.h.

$$\varphi^{\nu+2} u = \frac{G_{\nu+2}}{G_2^{2\nu+1}} \qquad \text{Q.E.D.}$$

Beschränken wir uns auf endl. Werthe von $\wp u$ so ist

$$\varphi(u_1+h) = \varphi u_1 + \frac{h}{1}\varphi' u_1 + \cdots$$

$$\varphi(u_2+h) = \varphi u_2 + \frac{h}{1}\varphi' u_2 + \cdots$$

$$\varphi(u_1+h) = \varphi(u_2+h)$$

$$\varphi(h) = \varphi(h+u_2-u_1)$$

für jedes h. Das heisst aber u_2-u_1 ist eine Periode, da die Gl. allgemein gilt.

(1) $x = R(st)$ (2) $y = R_1(st)$

(3) $x = \dfrac{L+Mt}{N}$ (4) $y = \dfrac{L'+M't}{N'}$

Es muss dann s auch den Gl.ⁿ genügen

(5) $(Nx-L)^2 - M^2(4s^2 - g_2 s - g_3) = 0$

(6) $(N'y-L')^2 - M'^2(4s^2 - g_2 s - g_3) = 0$

wo $4s^2 - g_2 s - g_3 = t^2$ steht. $= \left(\frac{ds}{du}\right)^2$

Man nehme ein gewisses s und bestim. aus (1) das t, und setze diesen Werth in (2) ein. Dies $t = \sqrt{4s^2 - g_2 s - g_3}$ muss eindeutig bestimmt sein, denn sonst gäbe es aus 3 & 4 je 2 Werthe für x und y, welches unmögl. ist da x u. y = Rat. fu. von s u. t.

$$\wp u = R(\varphi\varphi')$$

$$\wp' u = R_1(\varphi\varphi')$$

$$\varphi(u+v) = Q\,\wp u\,\wp v = R(\wp u\,\wp v\,\wp' u\,\wp' v)$$

$$\varphi(u+v) = R(\varphi u\, \varphi v\, \varphi' u\, \varphi' v)$$

und es giebt eindeutige Fc. mit dem Add Theorem. ; jede solche Fc. ist entweder einfach- oder doppelt-periodisch.

Es giebt in der That ∞ viele einfach periodische Fc. z/B. nehme man

$$\cos\left(\frac{u\pi}{\omega}\right) \qquad \sin\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)$$

und bilden daraus eindeut. Fc.

$$\mathfrak{F}\left(\cos\frac{u\pi}{\omega}\right)$$

so hat sie die Eigensch. der Periodicität und verhält sich im Endl. wie eine Rat F.

Wir bilden

$$\mathfrak{F}\cos\frac{u\pi}{\omega} + \sin\mathfrak{F}\cos\frac{u\pi}{\omega} = \varphi u.$$

eine Fc. mit der Per. 2ω. Soll nun dies ein Add Th. besitzen so muss F. = rat. F. ?

Mindestens hier wollen wir nur rat. F. betrachten

Wir theilen φ in 2 Theile, nämlich

in einen graden Theil $\varphi_1 u = \frac{1}{2}(\varphi u + \varphi - u)$

in einen ungrad. " $\varphi_2 u = \frac{1}{2}(\varphi u - \varphi - u)$

$$\varphi u = \varphi_1 u + \varphi_2 u.$$

$$\varphi_1(u) = \mathfrak{F}\left(\cos\frac{u\pi}{\omega}\right)$$

Man setzte $x = \cos\frac{u\pi}{\omega}$

und bilde $\mathfrak{F}(x)$ auf folgende Weise

x ist eindeut. für $u, u \mp 2\nu\omega, ..$

daher $\mathfrak{F}(x)$ ist auch eindeut.

aber $u = \infty$ mehr.deut Punct von F.

24. Mai.

Es kann demnach x in der Nähe x_0 $u=u_0$
entwickelt werden nach Potenzen von v
wo für $x = x_0 + h$ $u = u_0 + v$.

$$x_0 + h = \cos\left(\frac{(u_0+v)\pi}{\omega}\right)$$

$$h = -\frac{\pi}{\omega}\sin\left(\frac{u_0\pi}{\omega}\right)v - \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 \frac{1}{2}\cos\frac{u_0\pi}{\omega}v^2 + - -$$

wo die ungeraden Pot. mit sinus behaftet sind
" ~~un~~gerade " " cos

Erster Fall $\sin\frac{u_0\pi}{\omega} \gtrless 0$.
dann ist $h = \mathfrak{P}(v)$
und $v = \mathfrak{P}(h)$

Zweite Fall $\sin\frac{u_0\pi}{\omega} = 0$
Dann ist $h = \mathfrak{P}(v^2)$
$v^2 = \mathfrak{P}(h)$.

In diesem Falle ist $u_0 = \nu\omega$

$F(\cos\frac{u_0\pi}{\omega}) = \varphi_1(\nu\omega + v) = \varphi_1(\nu\omega - v) = \varphi_1(u_0 - v) = \varphi_1(u_0 + v)$
und $\varphi_1(2\nu\omega + v) = \varphi_1(v) = \varphi_1(-v)$.
indem man statt v $v - \nu\omega$ schreibt.
Das heisst aber ~~F~~ φ_1 ist eine grade Fn.
und die Pot R. hat nur gerade Potenzen.

Was den zweiten Theil anbetrifft, so ist
$\sin\left(\frac{u\pi}{\omega}\right)$ durch $\cos(\ )$ ausdrückbar.
und zwar $\sin^2$ rat. ausdrückbar.

Besitzt dann φu ein Add. Theo und eine einfache Periode so ist

$$\varphi u = \varphi_1 u + \varphi_2 u$$
$$\varphi - u = \varphi_1 u - \varphi_2 u$$

und φ_1 φ_2 haben dieselben Eigenschaften wie φ. Es besteht dann

$$G_0(\varphi u\ \varphi v) + G(\varphi(u)\ \varphi(v)\ \varphi(u+v)) = 0 \quad = \text{Add.th.}$$

Ist $\varphi(0) =$ endl.

$$\overline{G}_0(\varphi u\ \varphi v) + (\overline{G}_1(\varphi u\ \varphi v))(\varphi u+v - \varphi 0) = 0$$

$$v = -u$$

$$\overline{G}_0(\varphi u\ \varphi - u) = 0$$

$$\varphi(u+v) = \frac{1}{2}(\varphi(u+v) + \varphi(-u+v))$$

$$G(\varphi u\ \varphi_1 u) = 0$$

giebt wenn man $u = v$ $u = u+v$ setzt.

$$\mathfrak{G}(\varphi u\ \varphi v\ \varphi_1 u\ \varphi_1 v\ \varphi u+v\ \varphi u-v) = 0.$$

$$\varphi_2 u = \frac{1}{2}\varphi u - \frac{1}{2}(\varphi - u)$$
$$\varphi_2 v = \frac{1}{2}\varphi v - \frac{1}{2}\varphi - v)$$

$$\varphi_2(u+v) = \frac{1}{2}\varphi u+v + \frac{1}{2}\varphi(-(u+v)).$$

Jede Periode von φu ist zugl. eine Per. von φ_1 φ_2.

Wir haben dann

$$G(\varphi_1 u\ \varphi_2 u + 2\nu\omega) = 0$$
$$= \varphi_1 u \ ;\ \varphi_1(u+2\omega)\ ;\ \varphi_2\ u + 4\omega \ldots$$

Da aber die G eine algbr. Gl. ist so hat sie eine endl. Anzahl von W_z, und aus $\varphi_1(u+2\nu\omega)$ $\nu = 1 \dots n$ müssen mindesten 2 einander gl. sein.

$$\varphi(u_1) = \varphi(u+2\omega)$$

und 2ω ~~ist~~ eine Period. oder $2\lambda\omega$.

25.

$$\varphi u = \varphi_1 u + \varphi_2 u.$$

$$\varphi_1 = \mathfrak{F}(\cos\frac{u\pi}{\omega}) \qquad \varphi_2 = \sin(\frac{u\pi}{\omega}) \cdot \mathfrak{F}_1(\cos(\frac{u\pi}{\omega}).$$

φ_1 und φ_2 lassen sich so darstellen dass $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}_1$ eindeutige Funct. sind.
Nehmen wir für φu das Add theorem, ~~und~~ dass sie einfach periodisch sein soll, so wird auch φ_1 & φ_2 mindestens eine einfache Periode besitzen.

$$\cos\frac{u\pi}{\omega} = x$$

Nehmen wir an $\mathfrak{F}(x) = b$ = rat. aber nicht transcend. Fu. so wird diese Gl. bestehen für beliebig viele Werthe des x.

Die Gl.

$$G_1(\varphi_1(u+v), \varphi_1 u\ \varphi_1 v) = 0$$

sei i. Bz. $\varphi_1(u+v)$ vom Grade m, mit den Wurzeln $\varphi_1(u+v) = a_1 \dots a_m$, so kann man b auf ∞ viele Weise wahlen so dass

$$\varphi_1(a_1) = \varphi_1(a_2) \dots = \varphi_1(a_m) = b$$

$$\varphi_1(x) = \mathfrak{F}(x) = \mathfrak{F}_1\left(\cos\frac{u\pi}{\omega}\right).$$

Aus $\cos\frac{u_\nu\pi}{\omega} = a_\nu$ da $a_\nu \lessgtr a_{\nu+1}$

so ist auch $u_{\nu+1} \lessgtr u_\nu + 2\omega$

$$\cos\frac{u_\nu\pi}{\omega} \lessgtr \cos\frac{u_{\nu+1}\pi}{\omega}$$

$$\cos\frac{u_\nu\pi}{\omega} = \cos\frac{(u_\nu+2\omega)\pi}{\omega} \lessgtr \cos\frac{u_{\nu+1}\pi}{\omega}$$

$\varphi_1(u_1 + u_\lambda) = \varphi_1(u + u_\mu)$ und wenn man

$$\varphi_1(u_1 + u_\lambda - u_\mu) = \varphi_1(u)$$

so hat φ auch eine 2te Periode $u_\lambda - u_\mu$, welche kein Vielfaches von 2ω ist. Dann muss aber nach einem früher gegeb. Satz

$(u_\lambda - u_\mu) : 2\omega$ = imag. sein

Wenn denn $\mathfrak{F}$ eine transcendentale Fü ist, so hat sie 2 Perioden. Nach der Voraussetzung aber hat sie nur eine Periode, daher muss sie blos eine rationale Funct. sein.

Wenn also eine einfach periodische Funct. ein Add.th. besitzt, so ist sie rational d. den cosinus ausdrückbar.

Was φ_2 anbetrifft, so lässt sie sich darstellen d. φ_1 selbst.

$$(\varphi_2 u)^2 = \text{rat. funct.} \cdot \cos\frac{u\pi}{\omega} = \text{rat.}\,\mathfrak{F}(x)\,R(x).$$

$$R(x) = \frac{g(x)}{g_0(x)}.$$

Wenn $g_0 x = 0$, so ist diese Wurzel doppelt zu zählen.

$$(g_0 x)^2 \cdot \varphi_2^2 = g(x) \cdot g_0(x) = C\,(x-x_1)^{\lambda_1}(x-x_2)^{\lambda_2} \cdots$$

Es muss $\frac{g_0 x}{u}$ eine eindeut. F. von u sein, dazu muss jeder Fact $(x-x_\mu)$ in gerader Potenz vorkommen.

$$\varphi_2 = \frac{1}{g_0(x)} \cdot C'\,(x-x_1)^{\frac{\lambda_1}{2}}(x-x_2)^{\frac{\lambda_2}{2}} \cdots$$

und da φ_2 eine eindeutige Fn. sein soll so muss $\frac{\lambda_\nu}{2}$ eine ganze Zahl sein.

Wir nehmen

$$\cos\frac{u\pi}{\omega} - \cos\frac{u_1\pi}{\omega}$$

wo $u_1 \gtrless \nu\omega$, und entwick. nach Pot von $u-u_1$

$$-\frac{\pi}{\omega}\sin\left(\frac{u_1\pi}{\omega}\right)(u-u_1) + \cdots$$

$$\cos\frac{u_1\pi}{\omega} = x_1 \qquad \cos\frac{u\pi}{\omega} = x.$$

Weil $g_0^2 \cdot \varphi_2^2$ gerade in u ist so muss für jeden Factor $u-u_1$ auch der Fact $u+u_1$ vorkommen.

$$\cos\frac{u\pi}{\omega} = \frac{e^{\frac{u\pi i}{\omega}} + e^{-\frac{u\pi i}{\omega}}}{2}$$

$$\sin\frac{u\pi}{\omega} = \frac{e^{\frac{u\pi i}{\omega}} - e^{-\frac{u\pi i}{\omega}}}{2i}$$

$$\varphi u = \varphi_1 + \varphi_2 = R\left(e^{\frac{u\pi i}{\omega}}\right).$$

wenn φu einfach Period. ist und ein Add. th. besitzt.

$$w = 2\nu\omega + 2\nu'\omega'.$$

$$\sigma u = u \prod{}' \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}} \qquad w = -\infty \ldots +\infty$$

27. Mai.

Wir denken alle Factoren wo v mit sich selber multiplicirt vorkommt ausgerechnet,

Sin $u\pi$ hat an $u = \nu$ eine einfache Nullstelle die einfachen Factoren sind also in der Formel enthalten

$$1 - \frac{u}{\nu}$$

wo ν = ganze Zahl.

Um nun den exponential Factor für die Entwick von Sin $u\pi$ zu bestimmen, nehme man die Reihe von Zahlen $m_1 \ldots m_\nu$ so dass

$$\sum_\nu \left(\frac{1}{m_\nu}\right)^{m_\nu - 1}$$

eine converg. Reihe ist. Dies geschiet indem man $m_\nu = 3$ setzt.

d.h.

$$\sum \left(\frac{1}{n}\right)^u \text{ fur } n = 2.$$

$$\sum \left(\frac{1}{2}\right)^2. \qquad e^{\frac{u}{\nu}} = 1 + \frac{u}{\nu} + \frac{u^2}{1.2\nu^2} + \ldots = \sum \left(\frac{u}{\nu}\right)^\nu \frac{1}{\nu!}$$

$$\left(1 - \frac{u}{\nu}\right) e^{\frac{u}{\nu}} = \begin{array}{l} 1 + \frac{u}{\nu} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{\nu^2} + \frac{1}{2\cdot 3}\frac{u^3}{\nu^3} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4}\frac{u^4}{\nu^4} + \ldots \\ \quad - \frac{u}{\nu} - \frac{u^2}{\nu^2} - \frac{1}{2}\frac{u^3}{\nu^3} - \frac{1}{2\cdot3}\frac{u^4}{\nu^4} - \ldots \\ \hline 1 - \frac{u^2}{\nu^2} - \frac{2}{2\cdot3}\frac{u^3}{\nu^3} \qquad - \frac{3}{2\cdot3\cdot4}\frac{u^4}{\nu^4} \end{array}$$

$$= 1 -$$

$$1 - \frac{u^2}{\nu^2} - \frac{2}{2\cdot3}\frac{u^3}{\nu^3} - \frac{3}{2\cdot3\cdot4}\frac{u^4}{\nu^4} - \frac{4}{2\cdot3\cdot4\cdot5}\frac{u^5}{\nu^5}$$

$$= -\sum \frac{n-1}{n!}\frac{u^n}{\nu^n}$$

(A) $\sin(u\pi) = \pi u \cdot \prod_\nu{}' \left(1 - \frac{u}{\nu}\right) e^{\frac{u}{\nu}}$

Der Ausd. rechts hat dann alle Nullstellen, daher

$$\frac{\sin(u\pi)}{\pi u \prod'} = \text{const} \times e^{g(u)}$$

wo für $u=0$ gu endlich bleiben muss.
Um gu zu bestimmen diff. man A und divid. d. die Funct. selbst,

$$\frac{\pi \cos(u\pi)}{\sin u\pi} = \frac{1}{u} + \sum{}' \left(\frac{1}{u-\nu} + \frac{1}{\nu}\right) + g'u$$

und wir haben zu zeigen dass dies eine periodische Funct. ist mit der Periode 1

$$\psi u = \frac{1}{u} + \sum_\nu{}' \left(\frac{1}{u-\nu} + \frac{1}{\nu}\right)$$

$$\psi v = \frac{1}{v} + \sum_\nu{}' \left(\frac{1}{v-\nu} + \frac{1}{\nu}\right)$$

$$\psi u - \psi v = \frac{1}{u} - \frac{1}{v} + \sum{}' \left(\frac{1}{u-\nu} - \frac{1}{v-\nu}\right)$$

$$= \sum \left(\frac{1}{u-\nu} - \frac{1}{v-\nu}\right) \text{ ohne Beschränkung}$$

Dieser Ausd. ändert sich nicht wenn man statt ν, $(\nu-1)$ schreibt

$$= \sum \left(\frac{1}{u+1-\nu} - \frac{1}{v+1-\nu}\right) = \psi(u+1) - \psi(v+1)$$

oder $\psi(u+1) - \psi(u) = \psi(v+1) - \psi(v)$
das heisst so viel als, das u ist beliebig und die Funct. hat die Periode 1.

30ten Mai 1881.

$$\sigma u = u \prod{}' \left(1-\frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}$$

$$\log \sigma u = \log u + \Sigma\left\{\log\left(1-\frac{u}{w}\right) + \frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}\right\}.$$

Aber $\log\left(1-\frac{u}{w}\right) = -\frac{u}{w} - \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2} - \frac{1}{3}\frac{u^3}{w^3} - \frac{1}{4}\frac{u^4}{w^4} - \frac{1}{5}\frac{u^5}{w^5} \cdots$

und

$$\Sigma \log\left(1-\frac{u}{w}\right) = \Sigma -\frac{u}{w} - \Sigma \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2} - \frac{1}{3}\Sigma\frac{u^3}{w^3} - \frac{1}{4}\Sigma\frac{u^4}{w^4} \cdots$$

Da nun die Σ sich nur auf w bezieht, so läßt sich dies schreiben

$$\Sigma \log\left(1-\frac{u}{w}\right) = -u\,\Sigma\frac{1}{w} - \frac{u^2}{2}\Sigma\frac{1}{w^2} - \frac{u^3}{3}\Sigma\frac{1}{w^3} - \frac{u^4}{4}\Sigma\frac{1}{w^4} \cdots$$

wo $w = 2\nu\omega + 2\nu'\omega'$, $\nu = \pm 1, 2, 3, \cdots \pm\infty$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{w} = 2\sum_{1}^{+\infty}\frac{1}{w} = 2\left\{\frac{1}{2\omega+2\omega'} + \frac{1}{4\omega+4\omega'} + \cdots\right\}$$

$$\frac{1}{w^2} = 2\left\{\frac{1}{(2\omega+2\omega')^2} + \frac{1}{(4\omega+4\omega')^2} + \cdots\right\}$$

welche nicht sicher convergiren? Nicht klar.
Daher ist der zu jedem Glied hinzugefügte Factor $e^{\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}$ da, damit in dem Ausdruck für $\Sigma\log\left(1-\frac{u}{w}\right)$ die 2 ersten Glieder wegfallen. so dass

$$\log \sigma u = \log u - \Sigma\left(\frac{1}{3}\frac{u^3}{w^3} + \frac{1}{4}\frac{u^4}{w^4} + \cdots\right).$$

$$\sigma u = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{\eta u^2}{\omega}} \sin v\pi \prod \frac{\sin(u\tau - v\pi)}{\sin n\tau\pi} \cdot \frac{\sin(u\tau - v)\pi}{\sin n\tau\pi}$$

wo $\frac{u}{2\omega} = v$, $\frac{u'}{\omega} = \tau$ $e = z$

$$\sigma u = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{\eta u^2}{\omega}} \sin v\pi \prod_1^\infty \left(1 - \frac{\sin^2 v\pi}{\sin^2 n\tau\pi}\right)$$

und für den Sinus die analoge Form.

$$\sin u\pi = u\pi \prod \left(1 - \frac{u^2}{n^2}\right).$$

$$\frac{\sin \frac{u\pi}{2\omega}}{} = \frac{u\pi}{2\omega} \prod \left(1 - \left(\frac{\frac{u}{2\omega}}{n}\right)^2\right).$$

Ueber die Conv. dieses Productes. Hat man

$$\Pi = (1+x_1)(1+x_2) \cdots (1+x_n) = 1 + X_n$$

indem man bei dem $n$ten Gliede stehen bleibt, so convt Π wenn sich X_n eine feste Grenze nähert bei immer fort wachsendem n.

Die übrigen Glieder sind von der Form

$$(1+x_{n+1})(1+x_{n+2})(\cdots (1+x_{n+m}) = 1 + X_{nm}$$

Dieser Rest muss bei wachsendem n für $m = \infty$ verschwinden d.h.

$$\lim_{\left(\substack{n=\infty \\ n > m \\ m=\infty}\right)} (1 + X_{nm}) = 0$$

$$\lim X_{nm} = -1.$$

welches die Beding. der Conv. des Π ist. und die x_m müssen sich der Grenze 0 nähern. die einzelnen Factoren also die Grenze 1.

Oder es muss

$$\sum_1^n x_v$$

convergieren wenn $\Pi(1+x_v)$ conv. soll.

Setzt man $[x_n] = \xi_n$

so muss damit Π conv.

$$\xi_n + \xi_{n+1} \cdots \xi_{n+m} < \delta$$

wo δ belieb. klein ist.

Man theile also $\Pi(1+x_\nu)$ in 2 Theile

$$(1+x_1) \cdots\cdots (1+x_n)$$

und

$$(1+x_{n+1})(1+x_{n+2})\cdots(1+x_{n+m}).$$

und bringe den 2ten Theil auf die Form

$$1+X_{n+m}$$

so wird man nach dem Ausmultipl. lauter Glieder mit pos. Coeff. haben. Davon nehme man den Absolutbetrag, ~~so~~ wird

$$X_{n+m} \leqq \left((1+\xi_n)(1+\xi_{n+1})\cdots(1+\xi_{n+m})-1\right).$$

Man bringe nun $1+\xi_\nu$ auf die Form

$$1+\xi_m = \frac{1}{1-\frac{\xi_m}{1+\xi_m}} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{\xi_m}{1+\xi_m}\right)^\nu \qquad (A)$$

Nun ist aber

$$\left(1-\frac{\xi_m}{1+\xi_m}\right)\left(1-\frac{\xi_{m+1}}{1+\xi_{m+1}}\right)\cdots > 1-\frac{\xi_m}{1+\xi_m}\cdot\frac{\xi_{m+1}}{1+\xi_{m+1}}\cdot \text{——}\cdots$$

Links is der Nenner von A. Gehe man nun so weit ~~bis~~ in der Reihe $\sum\frac{\xi}{1+\xi_\nu}$ bis m so gross ist dass $\frac{\xi_m}{1+\xi_m}\cdot\frac{\xi_{m+1}}{1+\xi_{m+1}}\cdots < 1$

so ist dann der Nenner positiv in (A.)

Wir setzen Nenner $\geqq 1-\delta$ so folgt

$$|X_{mm}| \leqq \frac{1}{1-\delta} - 1 = \frac{\delta}{1-\delta} \qquad \text{Q.E.D.}$$

Der Grad der Conver. hängt ab vom Grade der Conv. von ξ. Kann man urtheilen wie viel Glieder nöthig sind damit $R < \delta$, so weiss man wie dieselbe Anzahl genügt damit Π conv.

Der Ausdruck $\sigma u = u \prod_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}$ ändert sich nicht wenn man w in $-w$ verwandelt, weil sich die Summation von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckt. Auch nicht wenn ω' in $-\omega'$. Deshalb kann man ω' immer so verschieben dass $R\frac{\omega}{\omega' i} > 0$ und $R\tau\pi > 0$.

Daraus hat man,

$$\frac{\omega'}{\omega} = i\tau_1 + \tau_2 = \tau$$

$$h = e^{\tau_2 \pi i} \cdot e^{-\tau_1 \pi X} = e^{\tau \pi i}$$

$$|h| = e^{-\tau_1 \pi X}$$

$$|e^{\tau_2 \pi i}| = 1$$

$$2i \sin n\tau\pi = e^{n\tau\pi i} - e^{-n\tau\pi i}$$

$$\frac{1}{\sin n\tau\pi} = \frac{2i}{h^n - h^{-n}} = \frac{-2i\, h^n}{1-h^{2n}}$$

$$\sin^2 \nu\pi = \sum 4 \frac{h^{2n}}{(1-h^{2n})^2}$$

welches wie eine Potenz-Reihe convergirt, und in demselben Grad wie h^{2n}.

$$2i \cdot \sin(n\tau - \nu)\pi = e^{(n\tau-\nu)\pi i} - e^{-(n\tau-\nu)\pi i}$$

$$= h^{u} z^{-1} - h^{2} z = -z + 2h^{u} i (1 - h^{2u} z^{-2})$$

$$z = e^{\frac{u}{2\omega}\pi i} \quad v = \frac{u}{2\omega} \quad \tau = \frac{\omega'}{\omega} \quad h = e^{\tau\pi i}$$

$$h = e^{\frac{\omega'}{\omega}\pi i}$$

$$\sin u\pi = \frac{h^{u} - h^{-u}}{2i} = \frac{i}{2} h^{-u} (1 - h^{2u})$$

$$\frac{z(1 - h^{2u} z^{-2})}{1 - h^{2u}}, \quad z^{-1} \frac{(1 - h^{2u} z^{2})}{1 - h^{2u}}$$

$$\frac{1 - h^{2u} z^{-2}}{1 - h^{2u}} = \frac{\sin(u\tau - v)\pi}{\sin u\tau\pi} e^{-v\pi i}$$

Das Π aus dem Ausdr. links conv't & die Conv. hängt ab von h^{2v}

$$\sigma u = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} \cdot \frac{z - z^{-1}}{2i} \cdot \prod \frac{1 - h^{2u} z^{-2}}{1 - h^{2u}} \cdot \prod \frac{1 - h^{2u} z^{2}}{1 - h^{2u}}$$

Das $\Pi(1 - h^{2u} z^{2}) = 0$ für $z = \frac{1}{h^{2u}}$

d.h. für $e^{\frac{u}{2\omega}\pi i} = e^{-\frac{2\omega'}{\omega}\pi i}$ i.e. $u = -4\omega'$

Die sigma Funct kann auf ∞ vielen Weisen dargestellt werden. In der ersten Form $\Pi(1 - \frac{u}{w}) e^{\dots}$ hängt jedes Glied ab von $u\ \omega\ \omega'$.

31 Mai

Zwei Periodenpaare sind congruent, wenn

alle Perioden, die aus dem einen Per. Paar zusammengesetzt sind, sich auch aus dem andern zusamm. setzen lassen.

Ein solches Per. Paar sei $\omega \; \omega'$

ein zweites $\omega_1 \; \omega_1'$

so muss statt haben

$$\omega_1 = \alpha\omega + \alpha'\omega'$$

$$\omega_1' = \beta\omega + \beta'\omega'$$

woraus

$$\omega = \frac{-\alpha'\omega_1' - \omega_1\beta'}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}$$

$$\omega' = \frac{-\omega_1\beta - \alpha\omega_1'}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}$$

Damit nun die Coefficienten ganze Zahlen seien muss $\alpha\beta' - \alpha'\beta = \pm 1$ sein, wie man sieht aus

$$\omega = \frac{-\alpha'}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} \cdot \omega_1' - \frac{\beta'}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}\omega_1$$

$$\omega' = \frac{-\alpha}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}\omega_1' - \frac{\beta}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}\omega_1$$

Oder $\omega = \pm(\beta'\omega_1 - \alpha'\omega_1')$

$$\omega' = \pm(-\beta\omega_1 + \alpha\omega_1')$$

Es ist hinreichend dass $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = +1$

Was nun das Verhältniss $\frac{\omega'}{\omega}$ anbetrifft

ist $\omega' = (\tau_1 + \tau_2 i)\omega$

so ist τ_2 positiv.

und $\omega_1' = (\tau_1' + \tau_2' i)\omega_1$

$$\omega_1 = (\alpha + \alpha'(\tau_1 + \tau_2 i))\omega$$

$$\omega_1' = (\beta + \beta'(\tau_1 + \tau_2 i))\omega'$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_1'} = \frac{(\alpha + \alpha'(\tau_1 + \tau_2 i))\omega}{(\beta + \beta'(\tau_1 + \tau_2 i))\omega'}$$

Der imag. Theil ist positiv wenn

$$\alpha'\beta - \alpha\beta' = +1$$

Es ist

$$w = 2\nu\omega + 2\nu'\omega'$$

$$w_1 = 2\mu\omega_1 + 2\mu'\omega_1'$$

und der Inbegriff aller w ~~ist~~ hat genau denselben Inhalt wie ~~der~~ Inbegriff aller w_1 und daher

$$\prod\left(1 - \frac{u}{w}\right)e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}} = \prod\left(1 - \frac{u}{w_1}\right)e^{\frac{u}{w_1} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w_1^2}}$$

oder $\sigma(u\,\omega\,\omega') = \sigma(u\,\omega_1\,\omega_1')$.

und $\sigma(u\omega\omega')$ ändert den Werth nicht, wenn man statt $\omega\ \omega'$ irgend welche lineare Funct derselben einführt deren Determinante gleich ist der + ~~p~~ positiven Einheit.

Die Formeln gelten auch wenn man setzt

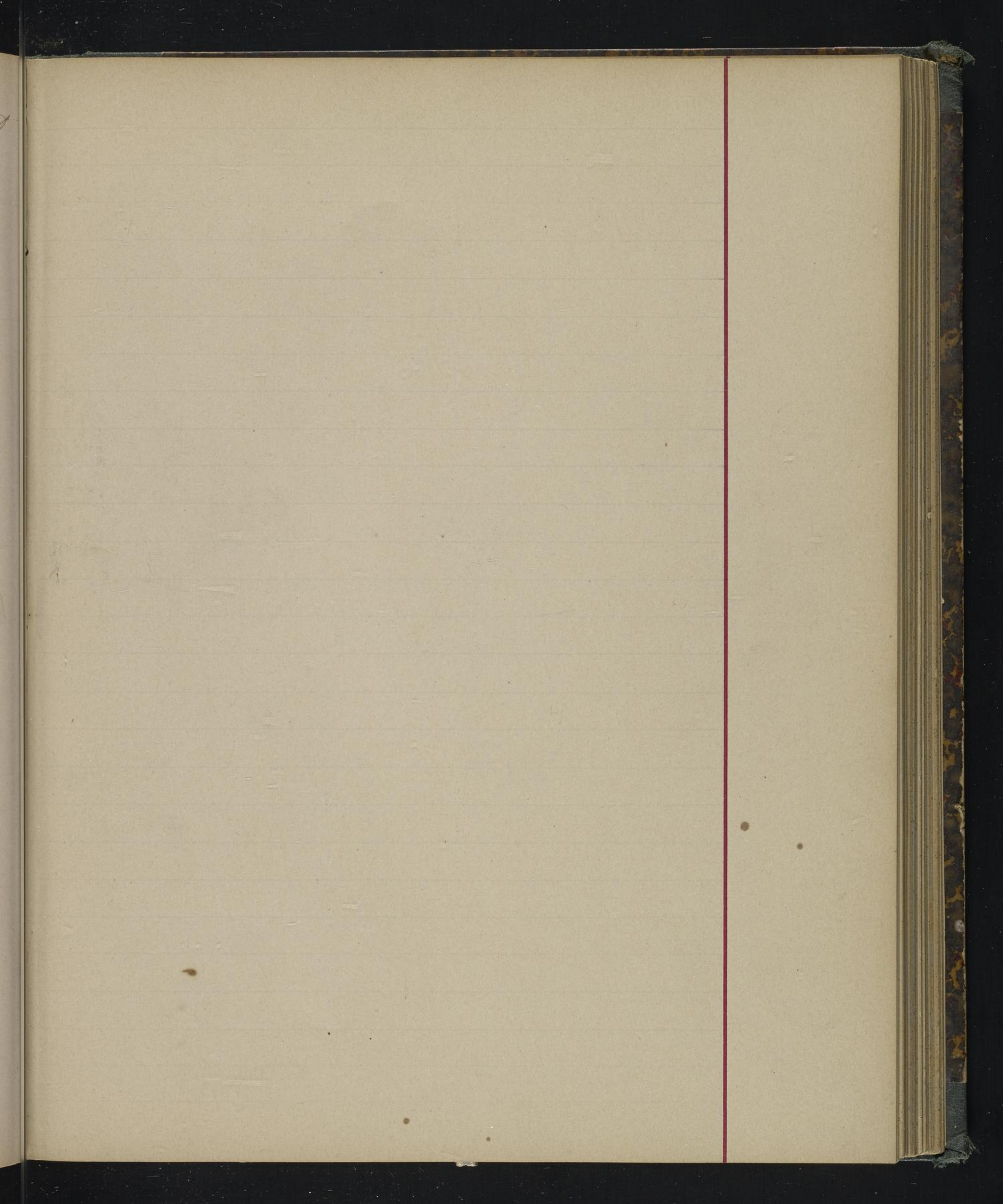
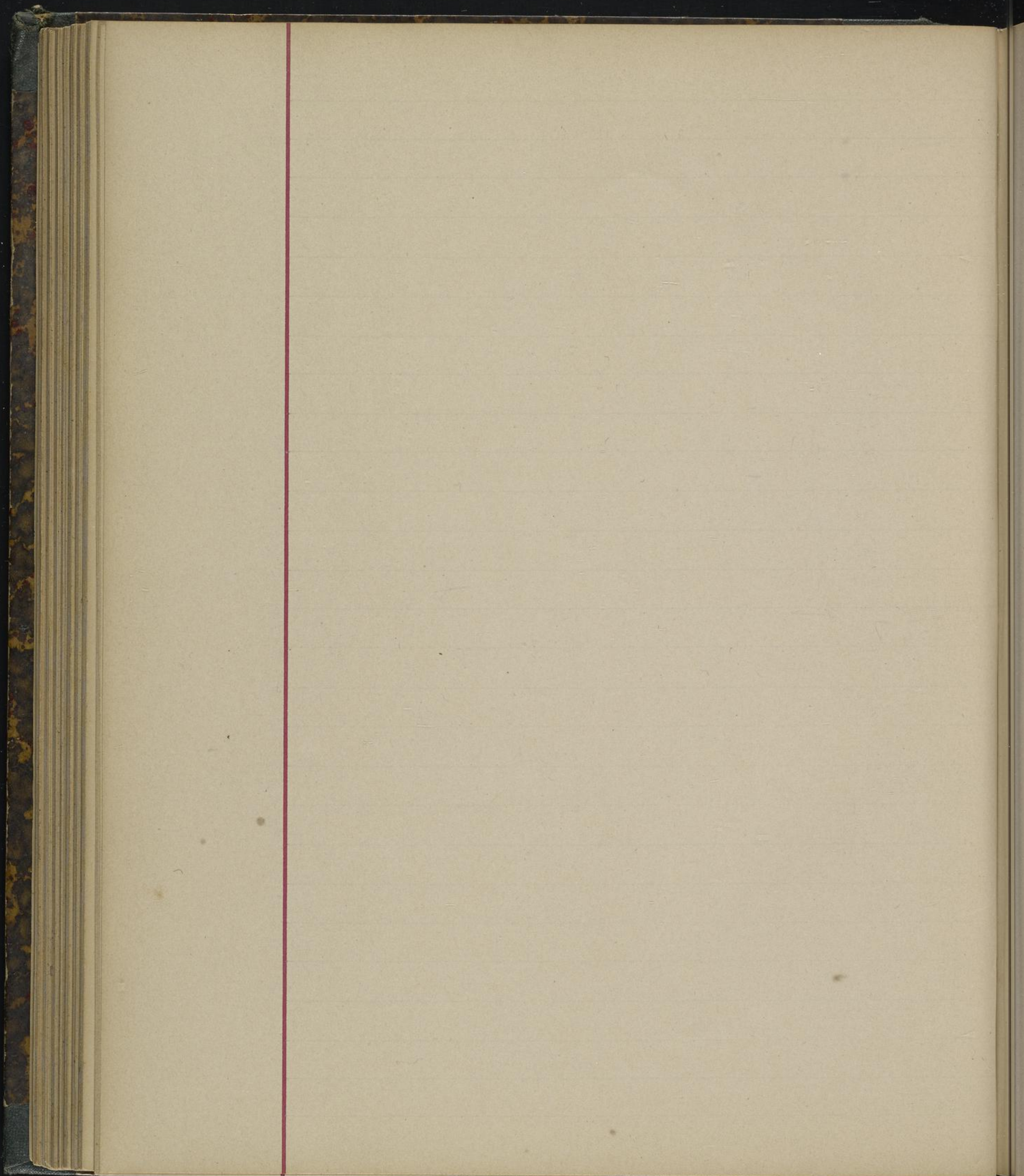
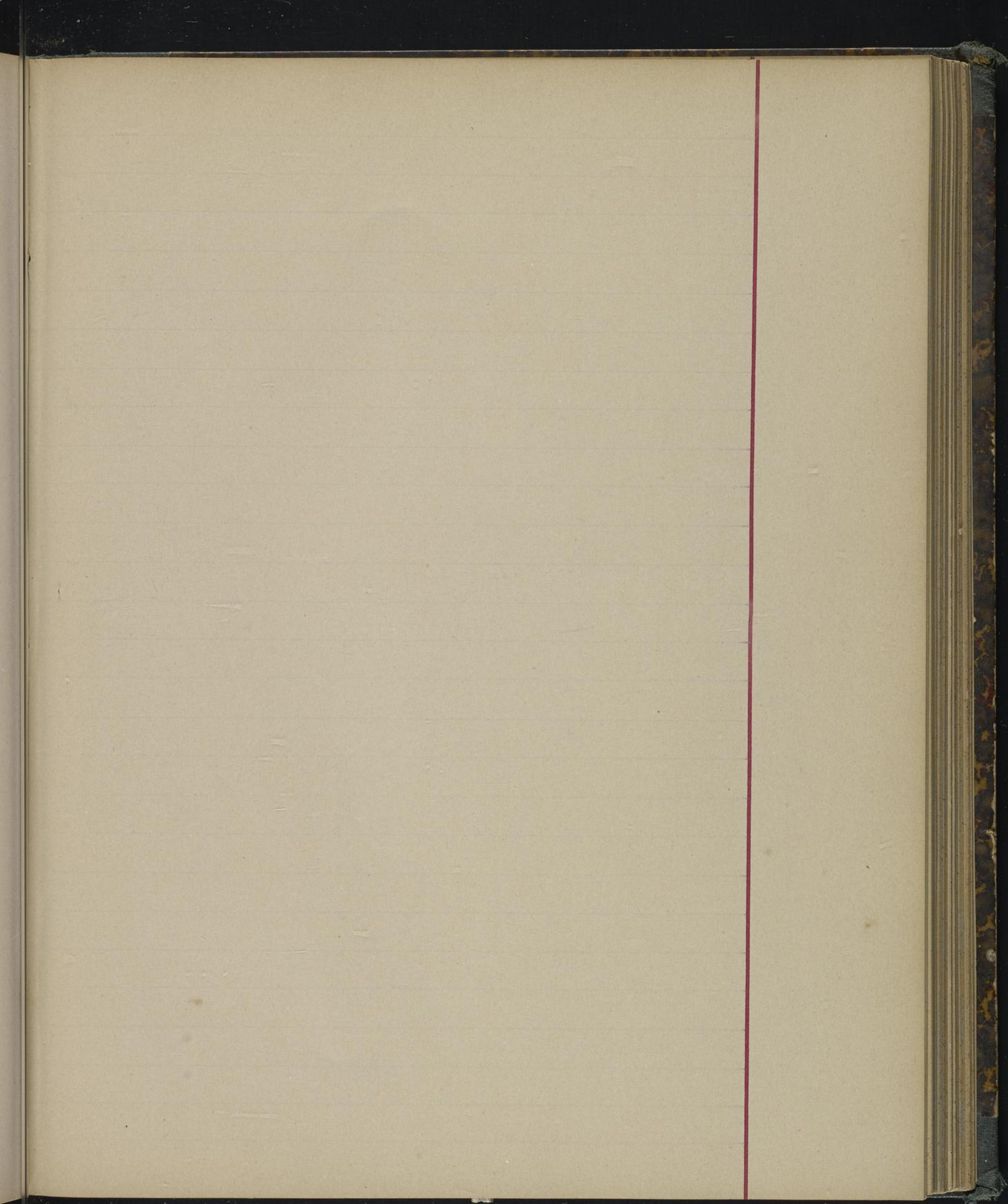
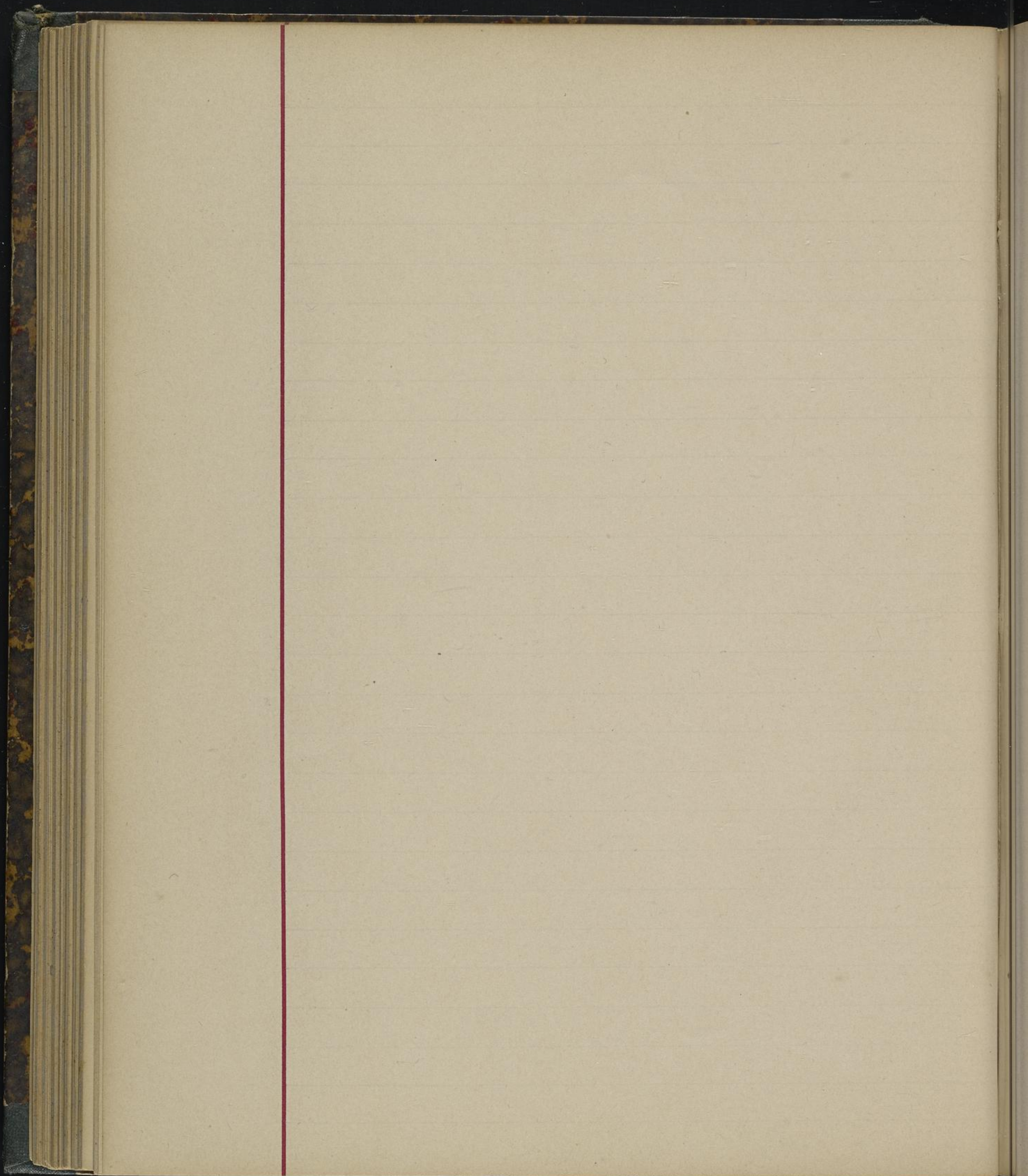
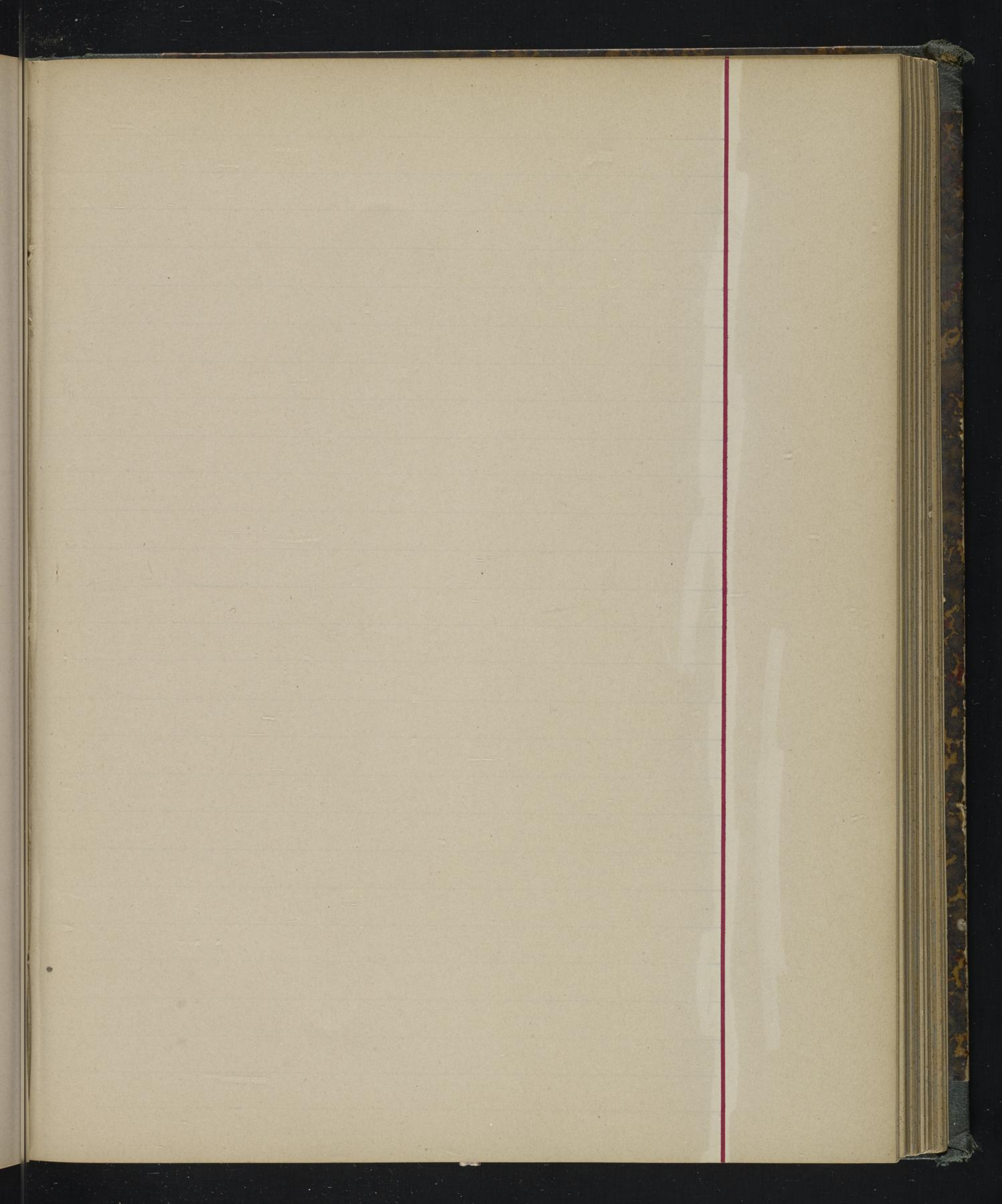
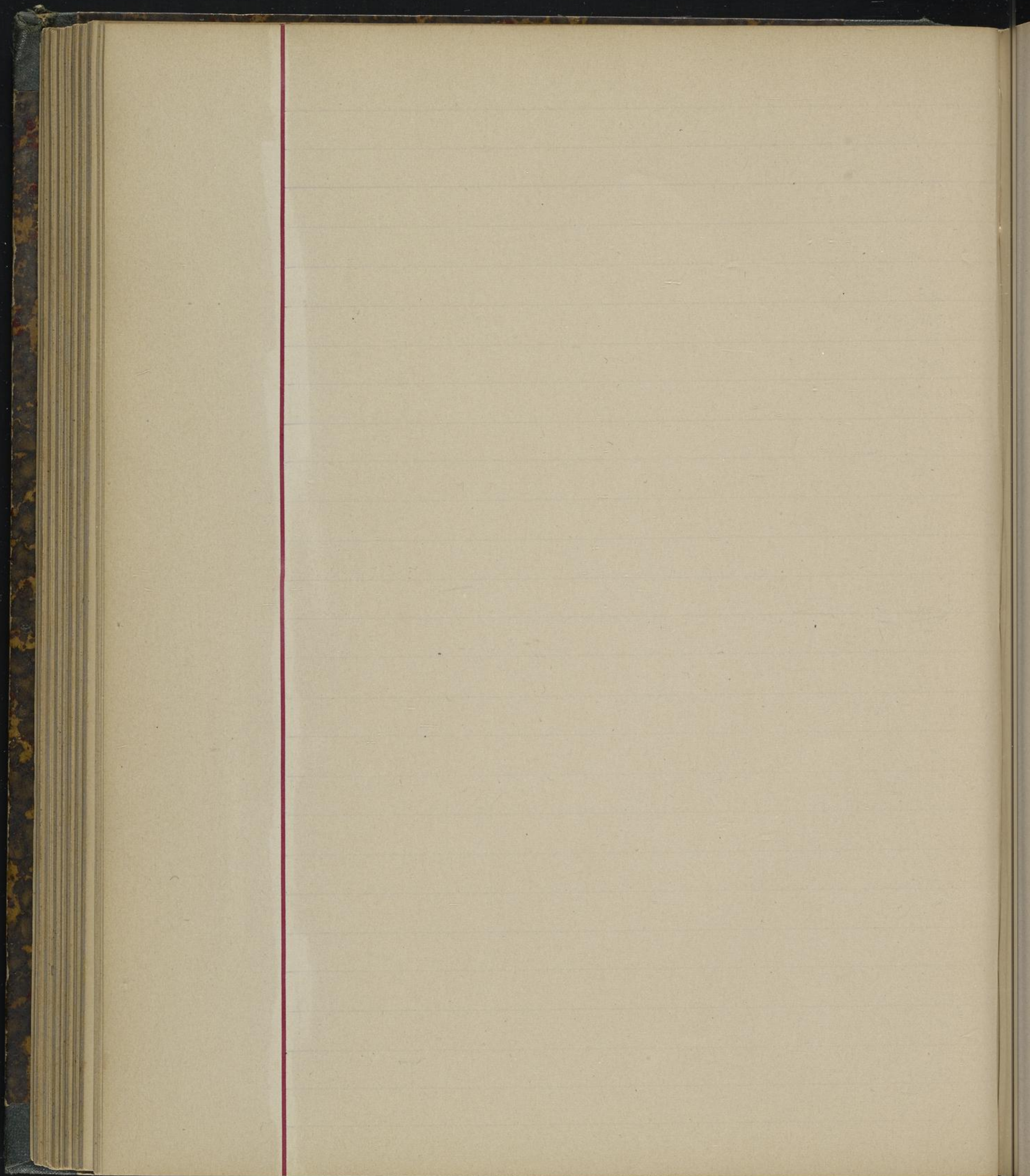
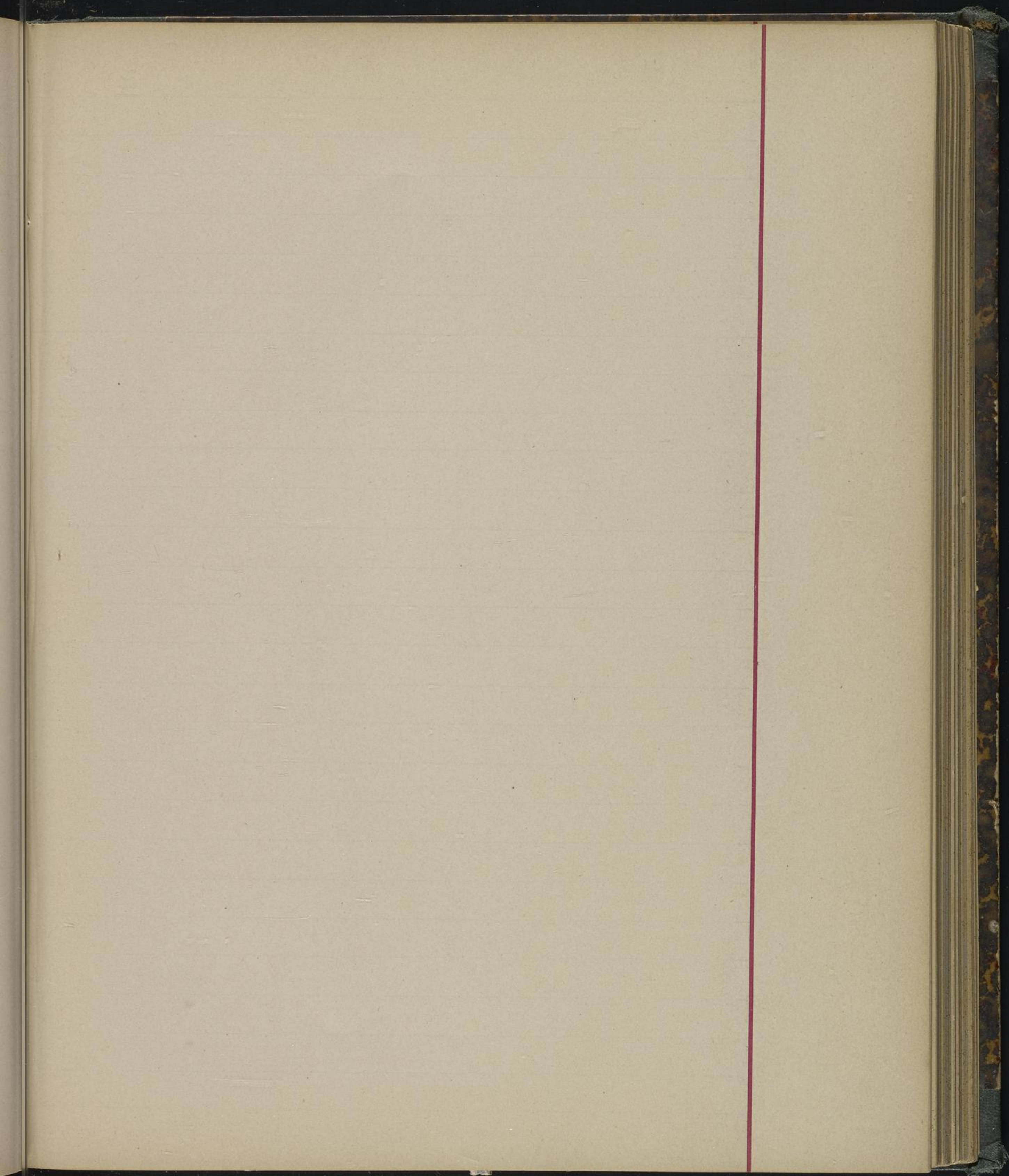
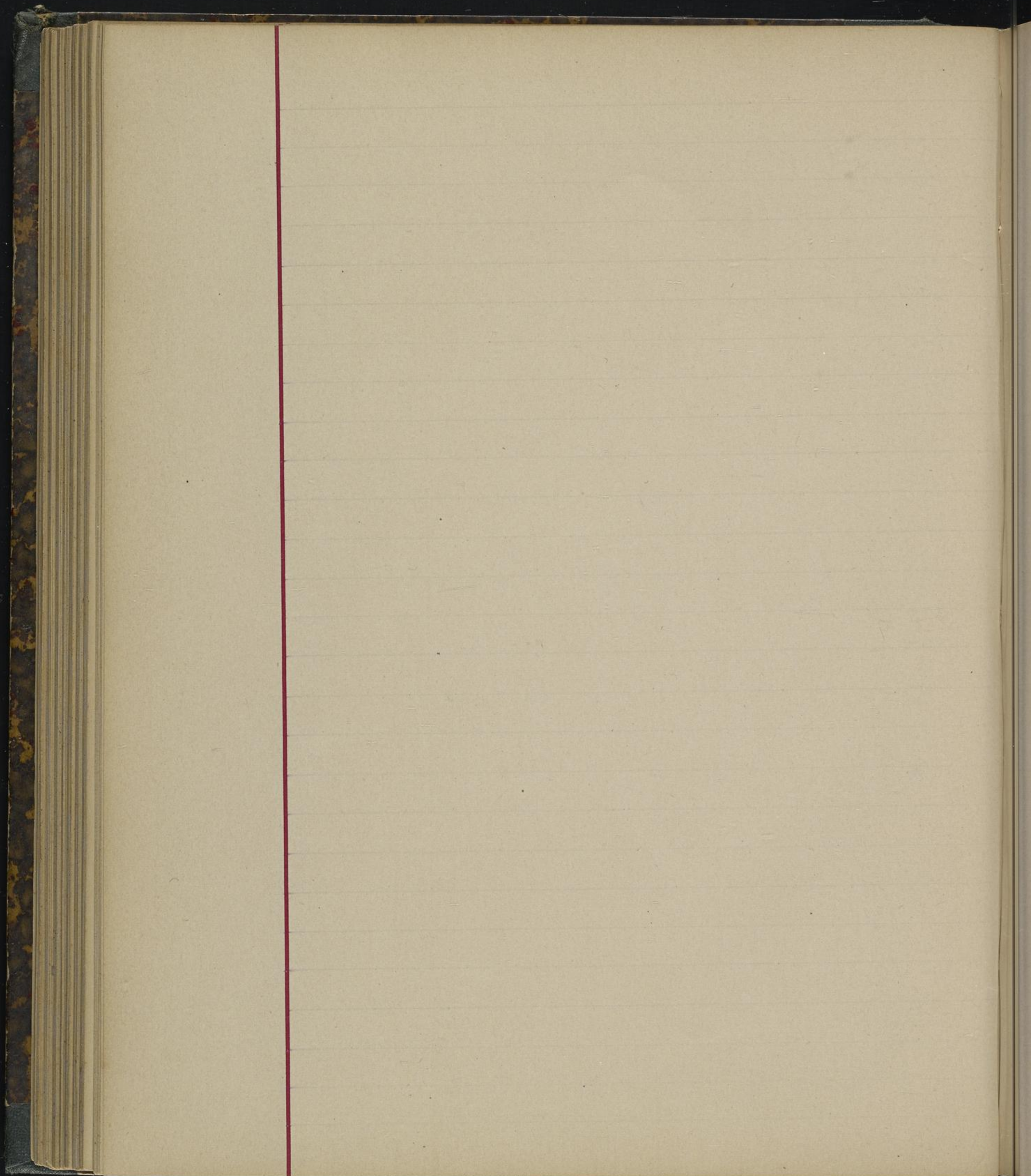
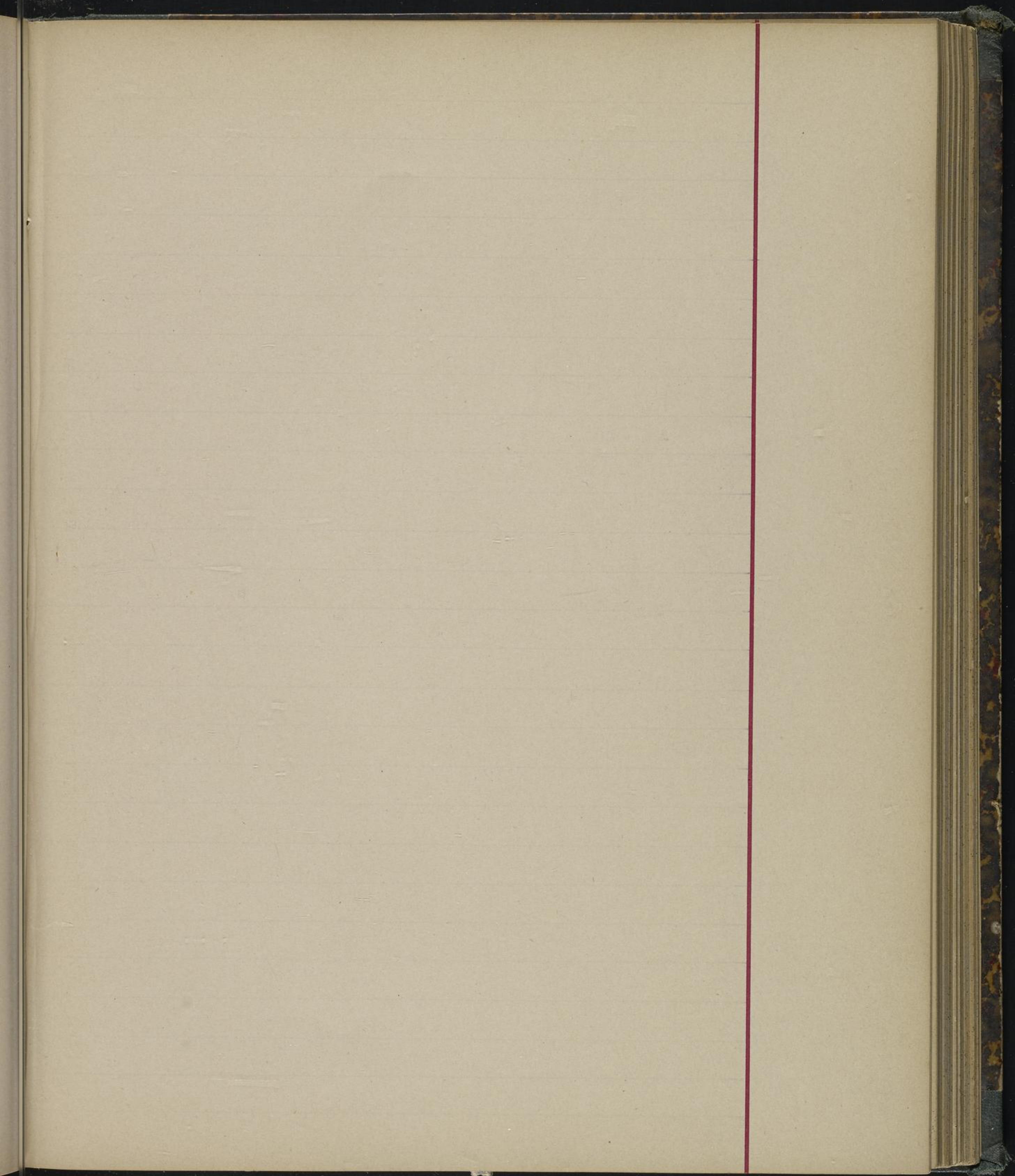
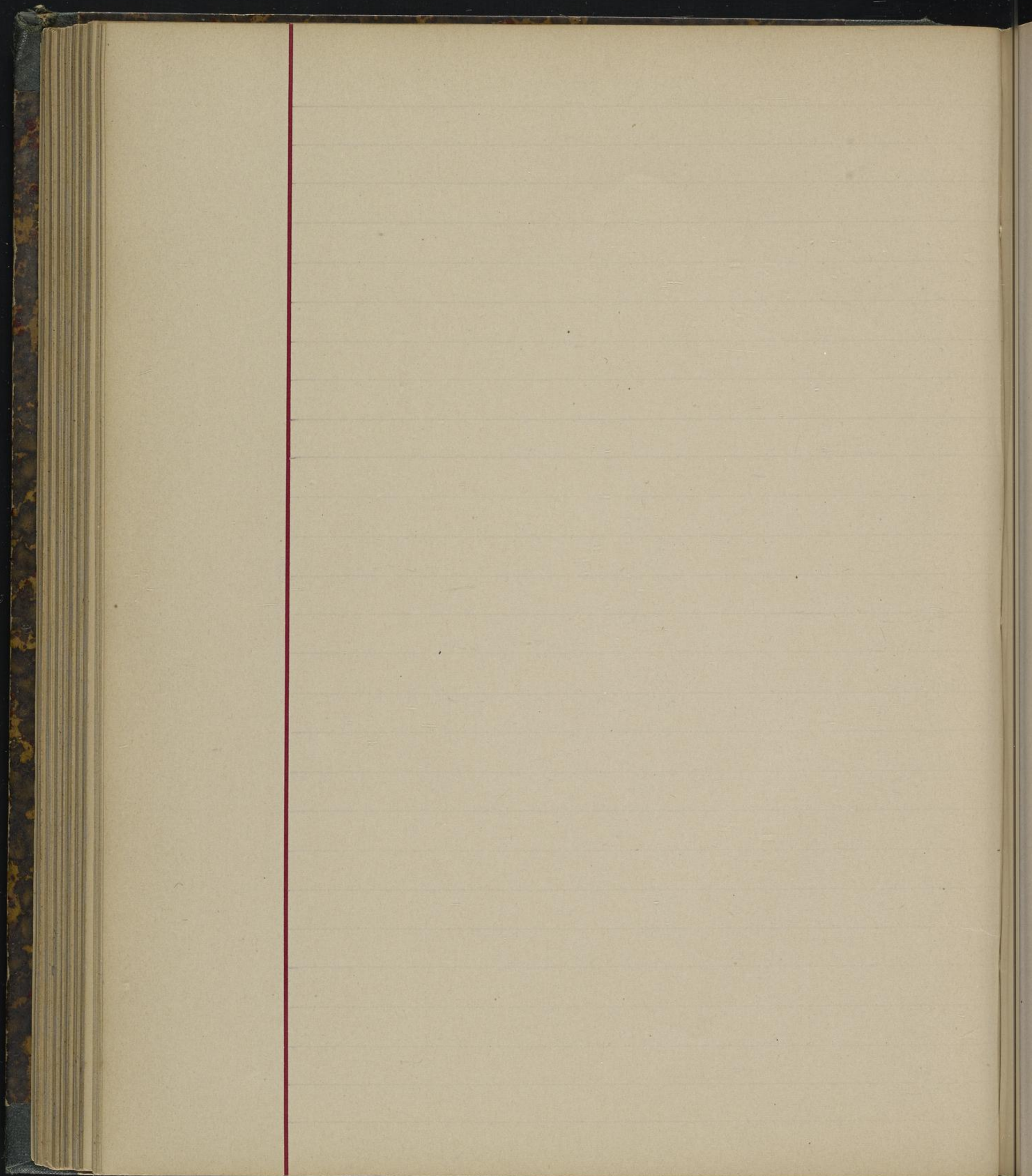
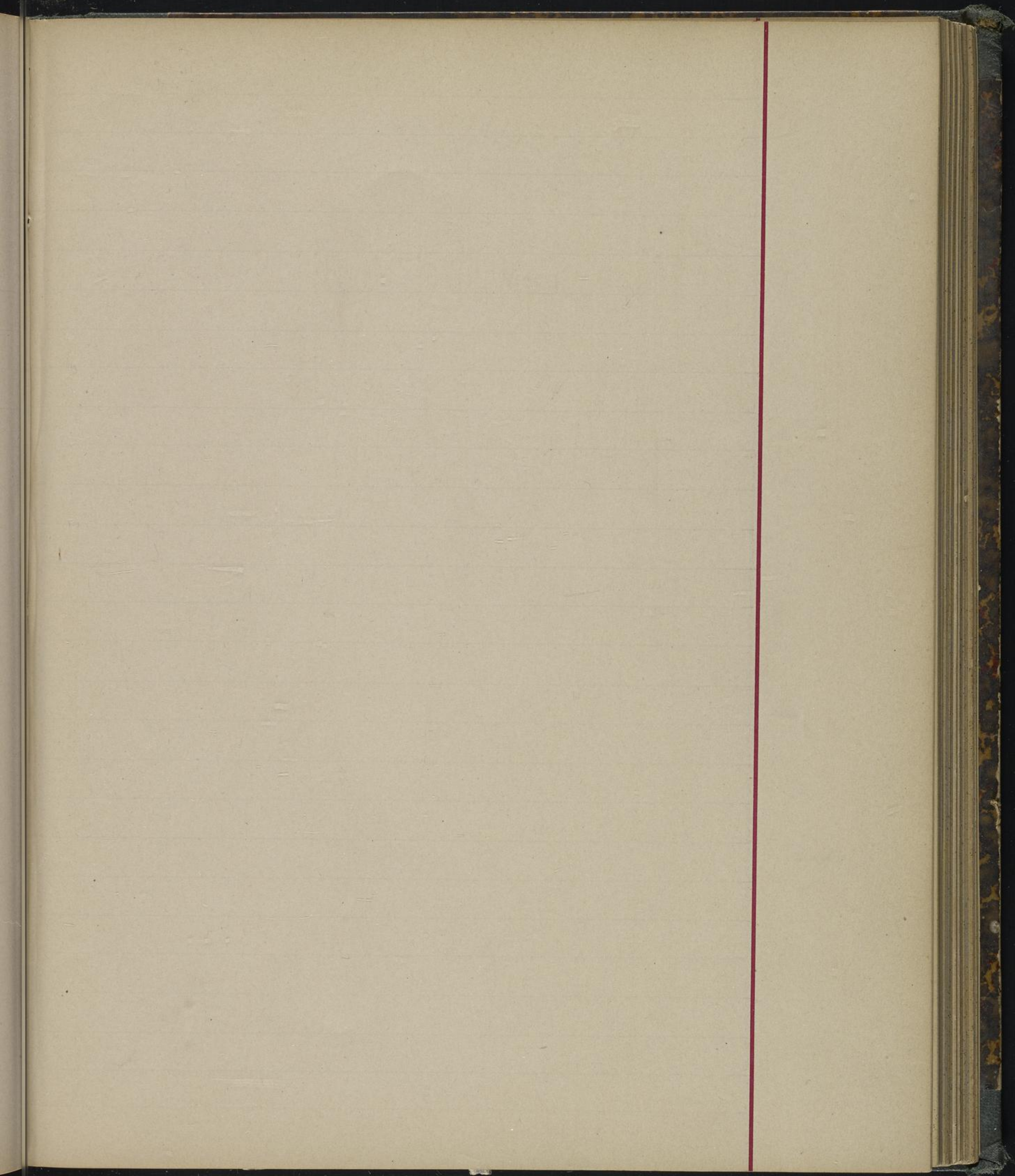
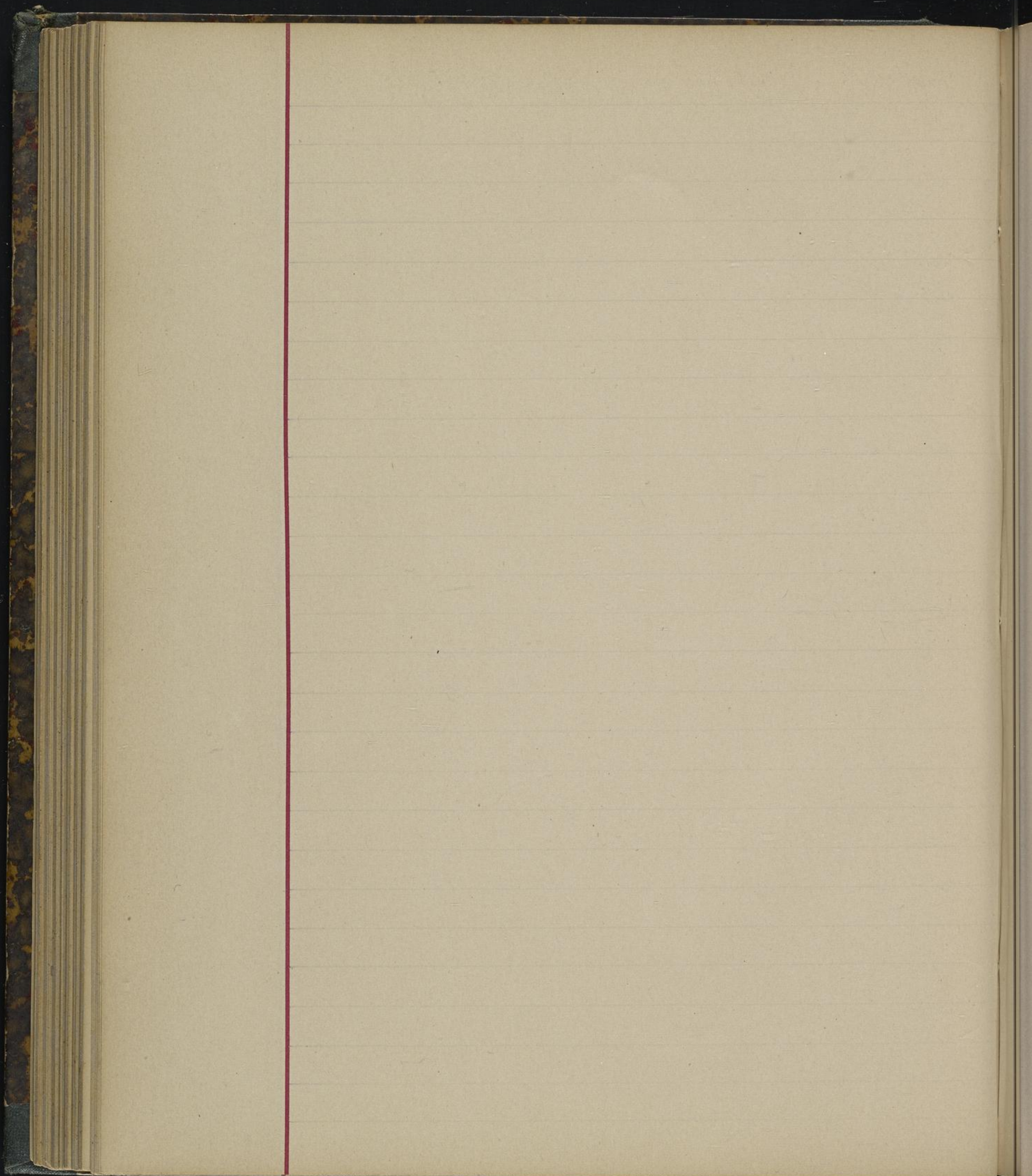
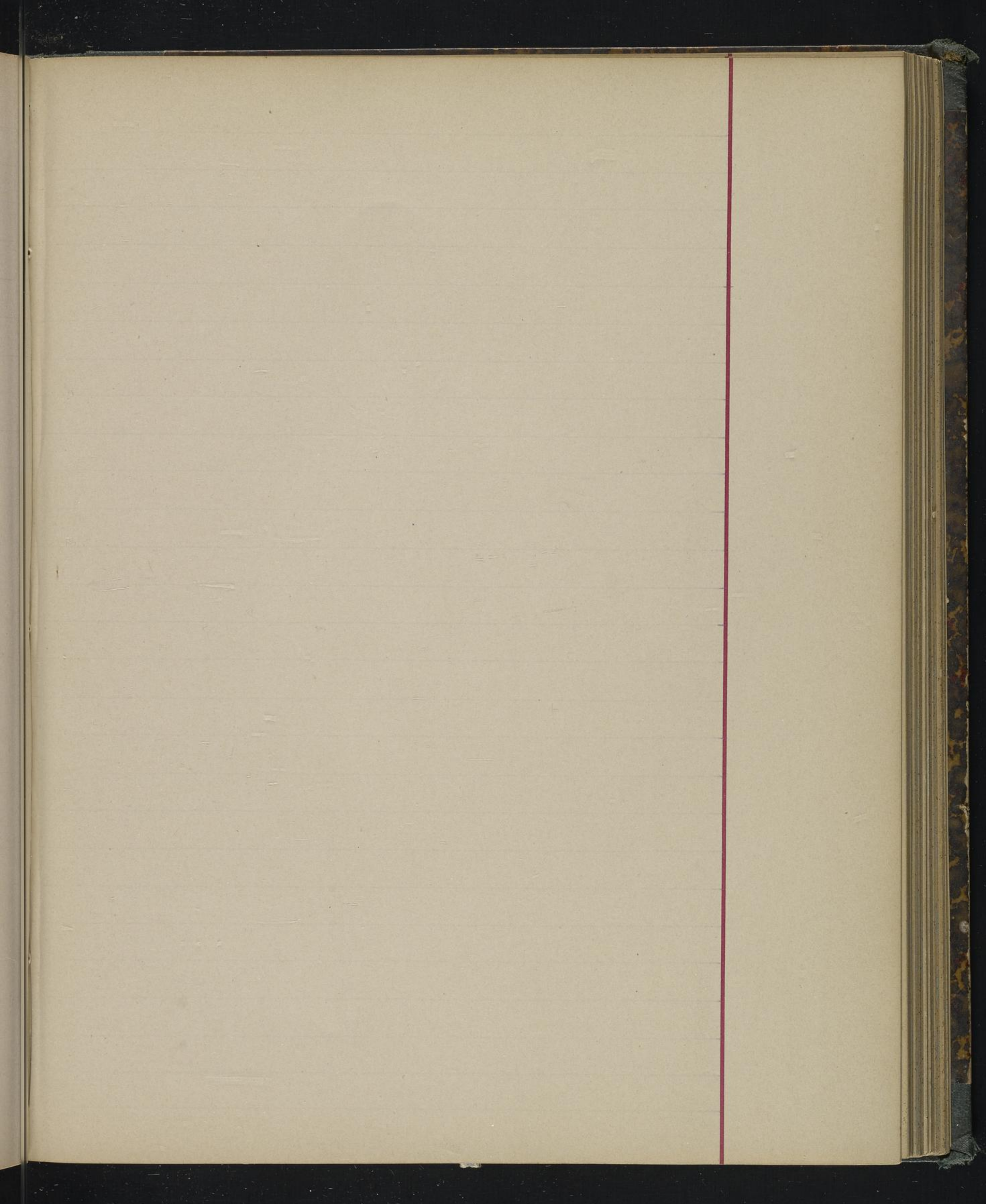
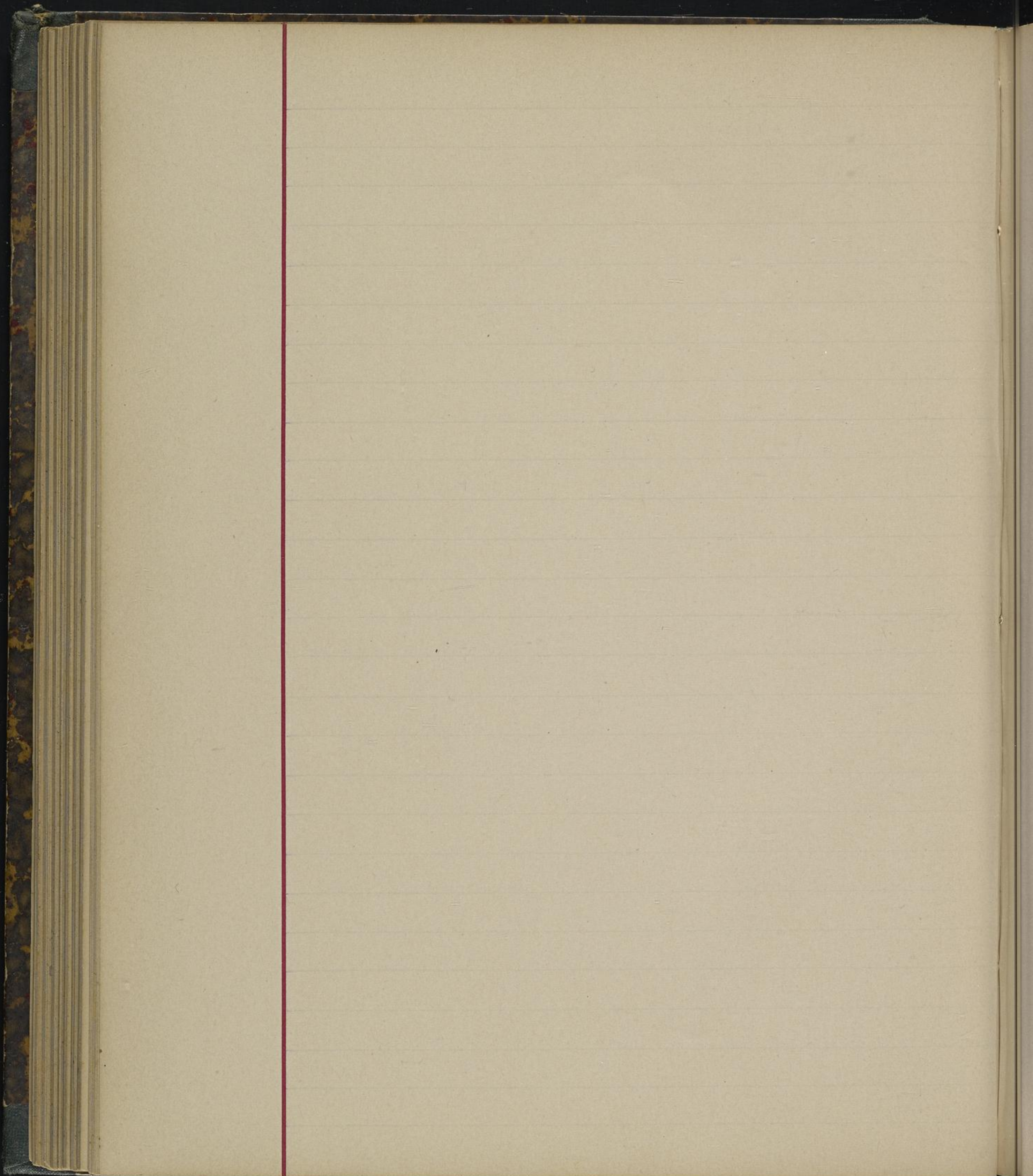
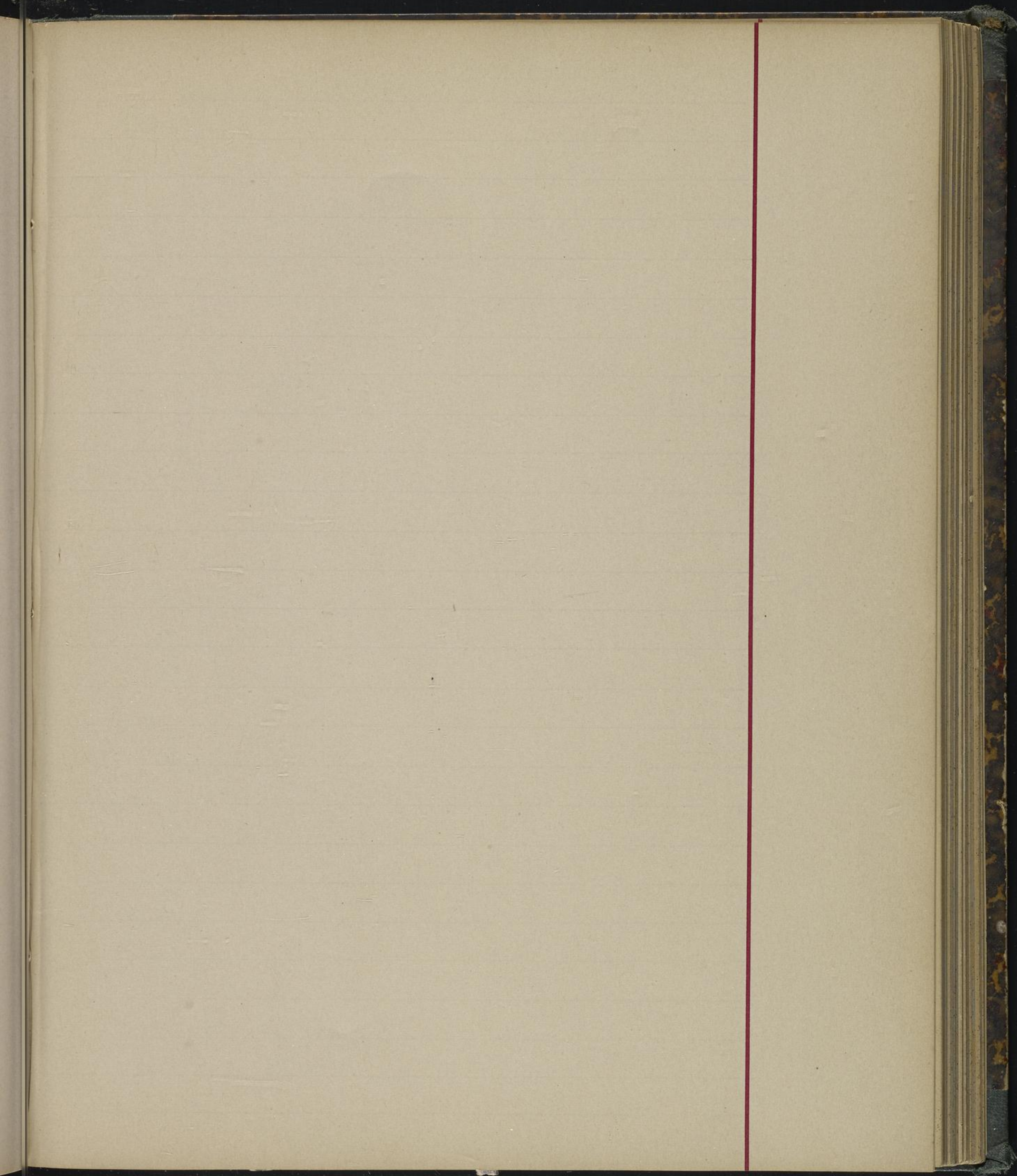
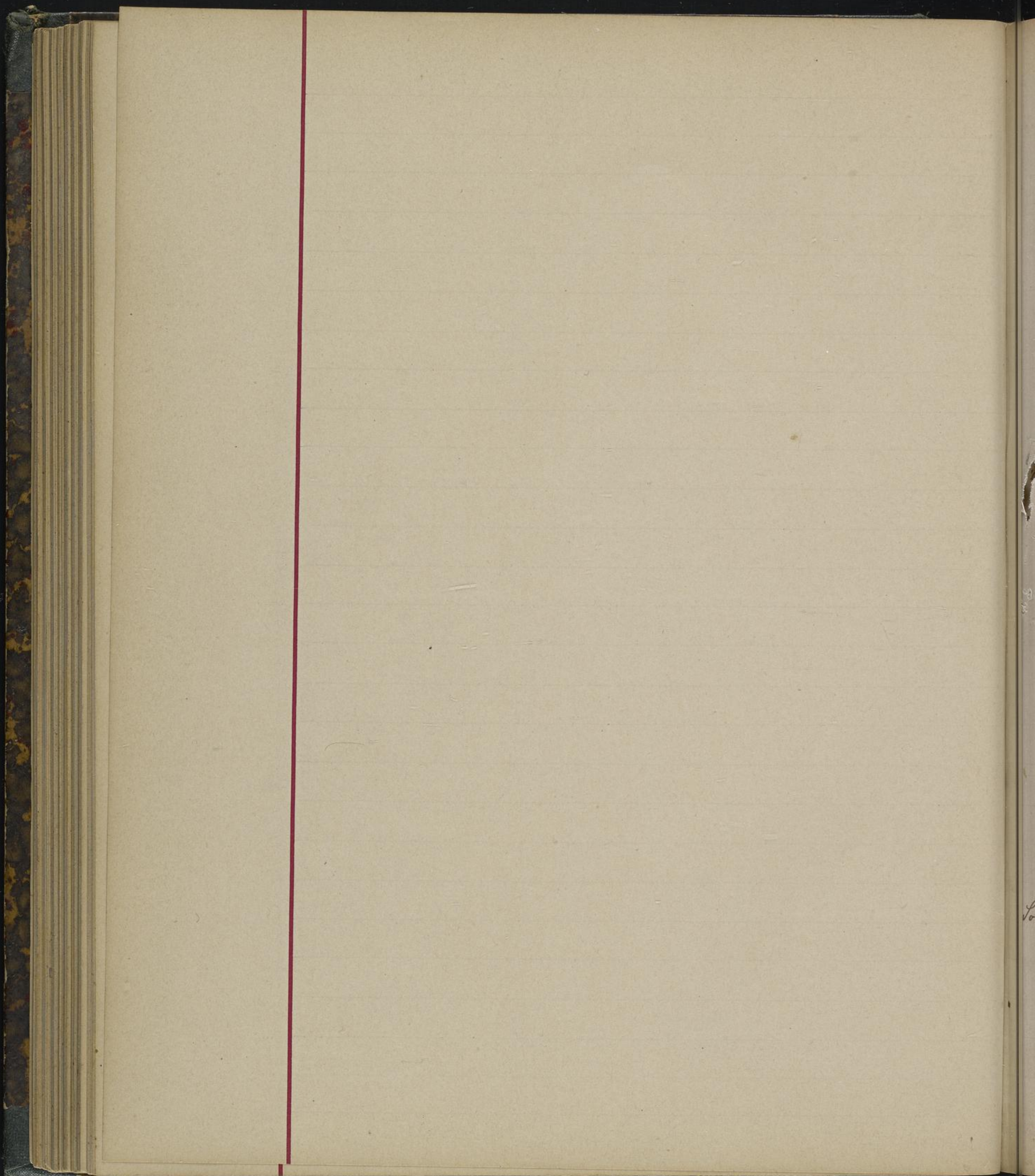
$$u = \frac{u}{2\omega} \qquad u_1 = \frac{u}{2\omega_1}$$

$$\tau = \frac{\omega'}{\omega} \qquad \tau_1 = \frac{\omega_1'}{\omega_1}$$

$$h = e^{\tau\pi i} \qquad h_1 = e^{\tau_1 \pi i}$$

Es war $\eta = \frac{\sigma'\omega}{\sigma\omega} \qquad \eta_1 = \frac{\sigma'\omega_1}{\sigma\omega_1}$

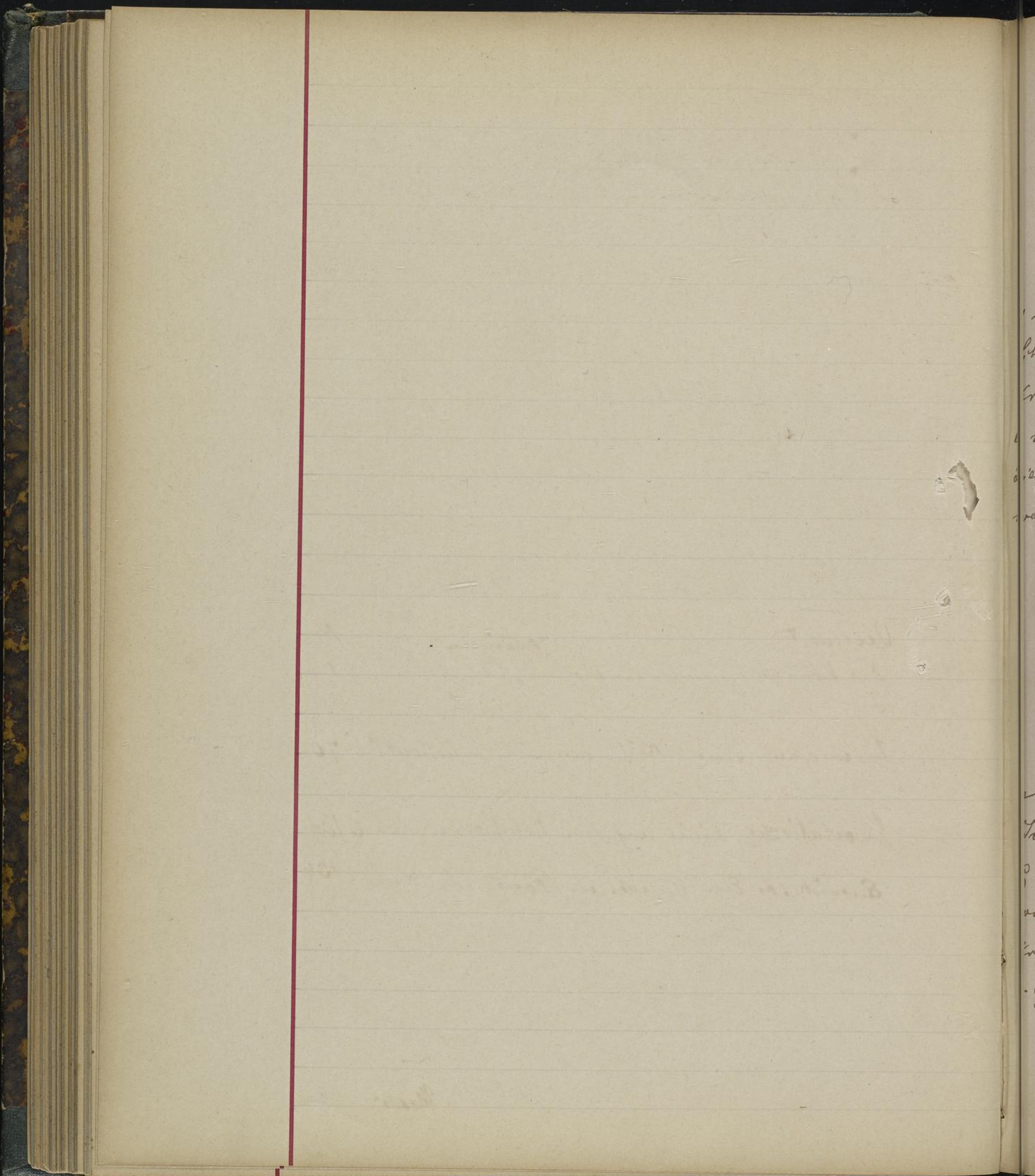
$$\frac{\sigma'(u + 2\nu\omega + 2\nu'\omega')}{\sigma(u + 2\nu\omega + 2\nu'\omega')} = 2\nu\eta + 2\nu'\eta' + \frac{\sigma' u}{\sigma u}$$

$$\frac{\sigma'(\nu\omega + \nu'\omega')}{\sigma(\nu\omega + \nu\omega')} = \nu\eta + \nu'\eta'$$

Weierstraß

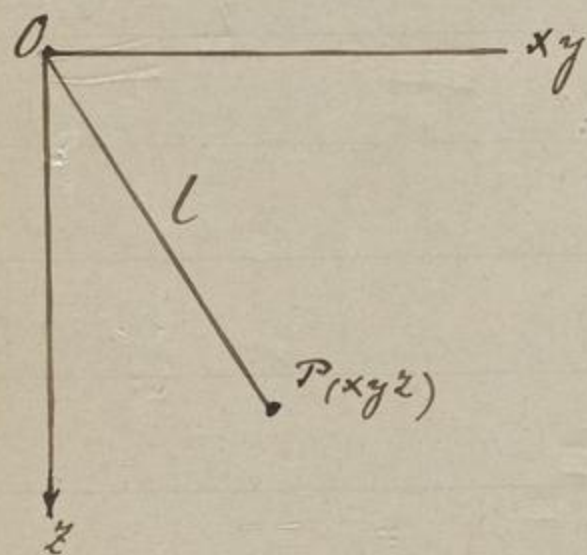
Anwendungen der elliptischen Functionen auf Probleme der Geometrie u. Mechanik.

Inhalt

Sommersemester 1879.

Meyer

Die Bewegung des einfachen sphärischen Pendels.

Ein materieller Punkt P, dessen Masse gleich 1 sei, bewegt sich unter der Einwirkung der Schwerkraft, wird dabei aber durch eine zweite Kraft gezwungen, stets in derselben Entfernung l von einem festen Punkte O zu bleiben. Es soll diese Bewegung des Punktes P näher beschrieben werden.

O x y l P(xyz) z

Der Punkt besitze zur Zeit t die Coordinaten $x\,y\,z$, bezogen auf ein rechtwinkliges Achsensystem, dessen Ursprung der feste Punkt O ist u. dessen positive z-Achse die Richtung der Schwere angibt. Ist ferner $2g$ die Beschleunigung der Schwerkraft, ϱ die Kraft, welche P in demselben Abstande l von O erhält, so sind die Componenten der Schwerkraft: $0, \; 0, \; 2g$; diejenigen von ϱ: $-\varrho\frac{x}{l}, \; -\varrho\frac{y}{l}, \; -\varrho\frac{z}{l}$ und daher die Bewegungsgleichungen:

$$1) \quad \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{x}{l}\varrho \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{y}{l}\varrho \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -\frac{z}{l}\varrho + 2g \end{aligned}$$

zu denen noch die Bedingung tritt:

$$2,\quad x^2+y^2+z^2=l^2$$

Hieraus ergeben sich ohne Weiteres die beiden Integrale:

$$3,\quad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = k$$

$$4,\quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 4gz+h\ ,$$

worin k u. h constante d.h. von der Zeit t unabhängige Größen sind. Die Gleichung (3) bedeutet den Flächensatz für die xy-Ebene, die Gleichung (4) den Satz der Erhaltung der lebendigen Kraft. Die Constanten k u. h sind bestimmt, sobald für eine bestimmte Zeit t_0 der Ort $x_0\, y_0\, z_0$ u. die Geschwindigkeitscomponenten des Punktes P gegeben sind. Ist z.B. die Geschwindigkeit zur Zeit t gleich v, zur Zeit t_0 gleich v_0, so folgt aus (4):

$$v^2 - v_0^2 = 4g(z-z_0)$$

Aus der Identität:

$$\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right)^2 = (x^2+y^2)\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right)$$

S. Kirch. p. 18
Diff. $x\,dy - y\,dx = c\,dt$ to get 3 obcn.
Aus 2 $x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt} = -z\frac{dz}{dt}$

folgt nun mit Berücksichtigung der Gleichungen (2)–(4):

$$k^2+z^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = (l^2-z^2)\left(4gz+h-\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right) \quad \text{oder:}$$

$$5,\quad \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(1-\frac{z^2}{l^2}\right)(4gz+h) - \frac{k^2}{l^2}\ ,$$

durch welche Gleichung z als elliptische Function von t bestimmt wird. Es sind daher noch die Coordinaten x u. y als Functionen von t darzustellen. Dazu pflegt man Polarcoordinaten einzuführen u. zuerst den Winkel zu bestimmen, welchen die Projection von l auf die Horizontalebene mit der x-Achse bildet. Indessen zeigt es sich, dass die Coordinaten selbst weit einfachere Functionen von t werden, als jener Winkel; daher suchen wir dieselben auch direct zu bestimmen. – Die Bewegung des Punktes P wird vollständig bestimmt sein, wenn wir neben der Gleichung (5) noch andre ableiten können, welche die Bewegung des Projectionspunktes von P in der Horizontalebene bestimmen. Dieser Punkt kann aber dargestellt werden durch die complexe Größe $x + iy$. Können wir daher $x+iy$ als Function von t finden, so ist dadurch die Bewegung von P vollständig beschrieben.

Nun ist:

mult. mit $x - iy$ im Z. & N.

$$\frac{d\log(x+iy)}{dt} = \frac{\frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}}{x+iy}$$

$$= \frac{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + i\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{ik - z\frac{dz}{dt}}{x^2+y^2}, \quad \text{also}$$

$$6) \quad \frac{d \log(x+iy)}{dt} = \frac{ik - z\frac{dz}{dt}}{l^2 - z^2}$$

Hierdurch wird also auch $\log(x+iy)$ als elliptische Function von t bestimmt.

Ist die Constante $k = 0$, so vereinfacht sich zwar die Gl. (5) nicht wesentlich, wohl aber die Gl. (6), denn diese ergibt dann:

$$x + iy = C\sqrt{(l^2 - z^2)} \qquad \text{oder:}$$

$$\frac{x+iy}{x_0+iy_0} = \sqrt{\frac{l^2 - z^2}{l^2 - z_0^2}} = s,$$

$$x = x_0 s$$

$$y = y_0 s, \quad \text{also} \quad \frac{x}{y} = \frac{x_0}{y_0} = \text{const.}$$

Diese Gleichung stellt eine Ebene dar, welche durch die z-Achse gelegt ist. Mithin: Ist die Constante $k = 0$, so schwingt das Pendel in einer vertikalen Ebene.

Die Aufgabe nun, aus den Gleichungen (5) u. (6) z u. $x+iy$ als Functionen von t zu bestimmen, ist ein Spezialfall einer Aufgabe allgemeineren Charakters, die sich bei den einzelnen Anwendungen immer wiederholt, nämlich eine Größe x als Function von u zu finden, so dass $\left(\frac{dx}{du}\right)^2$ gleich einer ganzen Function dritten oder vierten Grades von x ist, u. zweitens eine Größe $x_1 + x_2 i$ so zu bestimmen, dass $\frac{d \log(x_1 + x_2 i)}{du}$ gleich einer rationalen Function von x u. $\frac{dx}{du}$ ist. Wir lassen daher vor-

künftig das Problem des Pendels bei Seite u. entwickeln die Formeln, welche die eben erwähnte Aufgabe allgemein lösen.

Es sei:

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x) = Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4B'x + A'\text{; oder:}$$

7)
$$du = \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

An Stelle von x führen wir eine andre Variable s ein vermittelst der Gleichung:

8,
$$s = \frac{c}{x-a} + b \quad\text{, oder}\quad x - a = \frac{c}{s-b}$$

Dann wird:

$$dx = \frac{-c\,ds}{(s-b)^2} \quad , \quad R(x) = R\left(a + \frac{c}{s-b}\right)$$

Setzen wir ferner:

9,
$$R_1(s) = \frac{1}{c^2}(s-b)^4 R\left(a + \frac{c}{s-b}\right)$$

so ist $R_1(s)$ eine ganze Function vierten Grades von s u. es wird:

$$\sqrt{R(x)} = \frac{c}{(s-b)^2}\sqrt{R_1(s)}$$

Diese Gleichung ist in dem Sinne zu fassen, dass nachdem der Werth von $\sqrt{R(x)}$ fixirt ist, der Werth von $\sqrt{R_1(s)}$ aus dieser Gleichung bestimmt werden muss. Ist also z. B. $\sqrt{R(x)}$ positiv, so ist, wenn c positiv, auch $\sqrt{R_1(s)}$ positiv; wenn c negativ, auch $\sqrt{R_1(s)}$ negativ zu nehmen. Wir schreiben daher, indem wir $\varepsilon = \pm 1$ setzen vorstehende

Substit.

$$x = a + \frac{c}{s-b}$$

$$s = \frac{c}{x-a} + b$$

a = root

$$b = \frac{1}{24}R''(a)$$

$$c = \frac{1}{4}R'(a)$$

Gleichung besser in der Form:

$$10) \quad \sqrt{R(x)} = \frac{\varepsilon c}{(s-b)^2}\sqrt{R_1(s)}$$

Folglich:

$$11) \quad du = \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = -\varepsilon\frac{ds}{\sqrt{R_1(s)}}$$

Es lässt sich nun leicht zeigen, dass man die Constanten $a\,b\,c$ immer so bestimmen kann, dass die Function $R_1(s)$ die Form annimmt: $4s^3 - g_2 s - g_3$. Es ist nämlich:

$$R_1(s) = \frac{R(a)}{c^2}(s-b)^4 + \frac{R'(a)}{c}(s-b)^3 + \tfrac{1}{2}R''(a)(s-b)^2 + \tfrac{1}{6}cR'''(a)(s-b) + Ac^2,$$

wobei $R'\,R''\,R'''$ Ableitungen von R bedeuten. Damit nun hieraus das Glied mit s^4 wegfalle, muss $R(a) = 0$ sein d.h. es muss a irgend eine der Wurzeln der Gleichung $R(x) = 0$ sein. Ist dies der Fall, so wird:

$$R_1(s) = \frac{R'(a)}{c}s^3 + \left(\tfrac{1}{2}R''(a) - 3\frac{b}{c}R'(a)\right)s^2 + \left(3\frac{b^2}{c}R'(a) - bR''(a) + \tfrac{1}{6}cR'''(a)\right)s +$$
$$Ac^2 - \frac{R'(a)}{c}b^3 + \tfrac{1}{2}R''(a)b^2 - \tfrac{1}{6}bcR'''(a)$$

Bestimmt man daher c u. b durch die Gleichungen:

$$12) \quad c = \tfrac{1}{4}R'(a), \qquad b = \tfrac{1}{24}R''(a)$$

so fällt das Glied mit s^2 weg u. es nimmt $R_1(s)$ die Form an:

$$R_1(s) = 4s^3 - g_2 s - g_3 \quad , \text{ wo:}$$
$$g_2 = \tfrac{1}{48}R''^2(a) - \tfrac{1}{24}R'(a).R'''(a)$$
$$g_3 = \tfrac{1}{24^2}R'(a).R''(a).R'''(a) - \tfrac{1}{3}\tfrac{1}{24^2}R''^3(a) - \tfrac{1}{16}AR'^2(a) \text{ ist.}$$

Setzen wir:

$$R'(x) = 4 R_1(x)$$
$$R''(x) = 12 R_2(x)$$
13, $$R'''(x) = 24 R_3(x)$$
$$24A = R''''(x) = 24 R_4(x)$$

so gehen die Werthe von g_2 u. g_3 über in:

$$g_2 = 3R_2^2(a) - 4R_1(a) \cdot R_3(a)$$
$$g_3 = 2R_1(a) \cdot R_2(a) \cdot R_3(a) - R_4(a) \cdot R_1^2(a) - R_2^3(a)$$

Diese Grössen hängen nur scheinbar von a ab; thatsächlich sind dieselben von a durchaus unabhängig. Der Grund hiervon beruht auf Folgendem: Aus der Gleichung:

$$du = -\frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}$$

ergibt sich $s = p(u - u_0)$, wo u_0 eine Constante ist, d.h. es lässt sich s u. somit auch das ursprüngliche $x = \varphi(u)$ rational durch pu u. $p'u$ ausdrücken. Hätte man nun statt a eine zweite Wurzel der Gleichung $R(x) = 0$ benutzt, so würden die Werthe von g_2 u. g_3, falls diese Functionen dieser Wurzeln wären, sich geändert haben, u. man würde daher genau in derselben Weise $x = \varphi(u)$ rational aus den mit den veränderten Invarianten gebildeten Grössen pu $p'u$ ausgedrückt erhalten. Da man nun auch umgekehrt pu u. $p'u$ durch $\varphi(u)$ u. $\varphi'(u)$ ausdrücken kann, so

würde ein u. dasselbe Werthepaar $\varphi(u)$, $\varphi'(u)$ zu zwei von einander in ihren Entwicklungen verschiedenen Werthepaaren pu, $p'u$ führen, was nicht möglich ist, da man nur rationale Ausdrücke erhält.

Es müssen mithin g_2 u. g_3 von a unabhängig sein. Es ist nun auch leicht g_2 u. g_3 wirklich durch die Coefficienten der Gl. (7) auszudrücken. Die folgenden beiden Ausdrücke:

$AA' - 4BB' + 3C^2$ = see following page

$$R R_4 - 4 R_1 R_3 + 3 R_2^2$$

$$R R_2 R_4 + 2 R_1 R_2 R_3 - R R_3^2 - R_4 R_1^2 - R_2^3$$

stimmen nämlich bezüglich mit g_2 u. g_3 überein, wenn man in ihnen $x = a$ setzt, da $R(a) = 0$ ist. Dieselben sind aber überhaupt von x unabhängig, da ihre Ableitungen nach x für jeden Werth von x identisch verschwinden. Folglich müssen diese Ausdrücke überhaupt mit g_2 u. g_3 übereinstimmen, da sie dies thun, wenn man einer in ihnen gar nicht vorkommenden Größe einen bestimmten Werth beilegt. Also:

$$g_2 = R R_4 - 4 R_1 R_3 + 3 R_2^2$$

$$g_3 = R R_2 R_4 + 2 R_1 R_2 R_3 - R R_3^2 - R_4 R_1^2 - R_2^3$$

Die Werthe dieser Ausdrücke sind aber unmittelbar angebbar. Denn da sie von x unabhängig sind, so kann man sie bestimmen, indem man

einfach in den einzelnen Grössen R $x=0$ setzt, wodurch man erhält:

$$14,\quad \begin{aligned} g_2 &= AA' - 4BB' + 3C^2 \\ g_3 &= ACA' + 2BCB' - AB'^2 - A'B^2 - C^3 \end{aligned}$$

Versteht man also unter a eine Wurzel der Gleichung $R(x)=0$ u. setzt man:

$$15,\quad \begin{aligned} s &= \frac{1}{4}\frac{R'(a)}{x-a} + \frac{1}{24}R''(a) \\ \sqrt{R(x)} &= -\frac{1}{4}\frac{R'(a)}{(s-\frac{1}{24}R''(a))^2}\sqrt{S} \end{aligned} ,$$

$\sqrt{S} = \sqrt{R_1(s)}$

so wird dadurch die Gleichung:

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4B'x + A'$$

unmittelbar übergeführt in die folgende:

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3 ,$$

in der sich die Grössen g_2 u. g_3 aus den Gleichungen (14) bestimmen.

Es ist wichtig zu bemerken, dass diese Transformation durchaus unabhängig ist von der besonderen Beschaffenheit von $R(x)$; sie gilt, mögen nun in $R(x)$ einige der Coefficienten verschwinden oder nicht, oder mag die Gleichung $R(x)=0$ gleiche Wurzeln haben oder nicht, wofern sie nur überhaupt eine Wurzel zuleisst. Nur ein Fall scheint eine Ausnahme hiervon zu machen, nämlich der, wo die eine Wurzel der Gl. $R(x)=0$, also etwa a unendlich gross ist, denn dann neh-

men die Gleichungen (15) eine nicht brauchbare Form an. Jedoch kann man aus den Gl. (15) sehr leicht die für diesen Fall geltende Transformation erhalten. Ist nämlich eine Wurzel einer algebraischen Gleichung unendlich gross, so ist dies bekanntlich gleichbedeutend mit dem Verschwinden des Coefficienten der höchsten Potenz der Unbekannten. Mithin ist im vorliegenden Falle in der Gleichung (7) $A=0$ oder also, es reducirt sich $R(x)$ auf eine Function dritten Grades. Setzt man nun in $R(x)$ $x=\frac{1}{\xi}$, so wird die Gleichung:

$$R(x) = Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4B'x + A' = 0$$

übergehen in die folgende:

$$\bar{R}(\xi) = A + 4B\xi + 6C\xi^2 + 4B'\xi^3 + A'\xi^4 = 0 \qquad (A=0)$$

in welcher nun wieder sämtliche Wurzeln endliche Grössen sind u. der Wurzel $a=\infty$ der ersteren Gleichung die Wurzel $\frac{1}{a}=0$ entspricht.

Ferner wird:

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = -\frac{d\xi}{\sqrt{\bar{R}(\xi)}}$$

Hierauf kann man nun die Transformationsformel (15) unmittelbar anwenden; man hat darin nur für a 0, für x ξ u. für $R(x)$ $\bar{R}(\xi)$ zu setzen. Da nun:

$$\bar{R}'(0) = 4B$$
$$\bar{R}''(0) = 12C$$

ist, so erhält man:

$$s = \frac{B}{\xi} + \frac{1}{2}C$$

$$\sqrt{R(\xi)} = -\frac{B}{(s-\frac{1}{2}C)^2}\sqrt{S} = -\frac{\xi}{B}\sqrt{S}$$

$\left[\frac{B}{\xi}\right.$ ~~or ξB~~ ?

als diejenigen Substitutionen, welche die Gleichung:

$$\left(\frac{d\xi}{du}\right)^2 = A + 4B\xi + 6C\xi^2 + 4B'\xi^3 + A'\xi^4$$

$(A=0)$

in:

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3$$

überführen, worin g_2 u. g_3 aus (14) einfach dadurch hervorgehen, dass man darin:

$A \quad B \quad C \quad B' \quad A'$ resp. mit

$A' \quad B' \quad C \quad B \quad A$ vertauscht u. dann

$A = 0$ setzt, was natürlich wegen der symmetrischen Beschaffenheit der Formeln (14) keine andre Veränderung hervorbringt, als dass die mit A multiplicirten Glieder wegfallen. Geht man nun, indem man wieder $\xi = \frac{1}{x}$ setzt, zur ursprünglichen Gleichung zurück, so ergibt sich, dass die Gleichungen:

$$16) \quad \begin{aligned} s &= Bx + \tfrac{1}{2}C \\ \sqrt{S} &= -B\sqrt{R(x)} \end{aligned}$$

eine derjenigen Substitutionen bestimmen, welche die Gleichung:

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4B'x + A'$$

in die folgende:

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3$$

überführen, worin g_2 u. g_3 die Werthe haben:

$$17) \quad \begin{aligned} g_2 &= -4BB' + 3C^2 \\ g_3 &= 2BCB' - A'B^2 - C^3 \end{aligned}$$

Die andern drei Substitutionen, welche dieses leisten, gehen aus der Formel (15) dadurch hervor, dass man in ihnen für a irgend eine der Wurzeln der Gleichung $4Bx^3 + 6Cx^2 + 4B'x + A' = 0$ setzt.

Das eben gefundene Resultat lässt sich natürlich auch ganz direct herleiten. Es sei nämlich:

$$\begin{aligned} R(x) &= 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4B'x + A' \\ &= 4B\left(x + \frac{1}{2}\frac{C}{B}\right)^3 + \frac{4BB' - 3C^2}{B}x + A' - \frac{1}{2}\frac{C^3}{B} \end{aligned}$$

Setzt man nun hierin:

$$Bx + \frac{1}{2}C = s$$

$$g_2 = -4BB' + 3C^2$$

$$g_3 = 2BCB' - A'B^2 - C^3 \qquad \text{endlich}$$

$$\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3} = -B\sqrt{R(x)},$$

so erhält man schliesslich die Gleichung:

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = -\frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}$$

Somit wir nachgewiesen, dass die Substitutionen (15) nicht nur in dem Falle wo $R(x)$ vom vierten Grade ist, sondern auch noch dann, wenn $R(x)$ vom dritten Grade ist, zum Ziele führen, wie be-

When the 4th power in $R(x)$ is wanting

schaffen auch die Wurzel a sein möge.

Wir wollen jetzt annehmen, dass $R(x)$ vom vierten Grade sei, u. die Wurzeln derselben in irgend einer Reihenfolge mit $a_1\ a_2\ a_3\ a_4$ bezeichnen. In Formel (15) sei $a = a_1$. Aus der Formeln (15) folgt:

$$\sqrt{S} = -\frac{1}{4}\frac{R'(a_1)}{(x-a_1)^2}\sqrt{R(x)}$$

Hieraus erkennt man, dass S nur dann verschwinden kann, wenn $R(x) = 0$ ist u. zwar nur für die Werthe $a_2\ a_3\ a_4$ von x. Bezeichnen wir daher die drei Wurzeln der Gleichung $S = 0$ den Grössen $a_2\ a_3\ a_4$ entsprechend mit $e_1\ e_2\ e_3$, so erhält man:

aus Form. 15

$$e_1 = \frac{1}{4}\frac{R'(a_1)}{a_2-a_1} + \frac{1}{24}R''(a_1)$$

$$18)\quad e_2 = \frac{1}{4}\frac{R'(a_1)}{a_3-a_1} + \frac{1}{24}R''(a_1)$$

$$e_3 = \frac{1}{4}\frac{R'(a_1)}{a_4-a_1} + \frac{1}{24}R''(a_1)$$

und hieraus:

$$e_1 - e_2 = -\frac{1}{4}A\,(a_2-a_3)(a_1-a_4)$$

$$19)\quad e_1 - e_3 = -\frac{1}{4}A\,(a_2-a_4)(a_1-a_3)$$

$$e_2 - e_3 = -\frac{1}{4}A\,(a_1-a_2)(a_3-a_4)$$

Durch diese Formeln sind die Grössen e bestimmt, sobald man die Wurzeln der Gleichung $R(x) = 0$ kennt; umgekehrt aber können dieselben auch dazu dienen, die Auflösung der Gleichung vierten Grades $R(x) = 0$ auf diejenige dritten Grades

zu reduciren.

Da man in den Gleichungen (15) für a jede der Wurzeln der Gleichung $R(x)=0$ substituiren kann, so erhält man vier verschiedene Transformationsformeln; welche von diesen man in jedem einzelnen Falle anzuwenden hat, hängt hauptsächlich von dem Intervalle ab, in welchem sich x bewegt.

Da das allgemeine Integral der Differentialgleichung:

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3$$

$s = p(u-u_0)$ ist, wo u_0 eine Constante bedeutet, so folgt aus (15) für x der Werth:

$$20) \quad x = a + \frac{\frac{1}{4} R'(a)}{p(u-u_0) - \frac{1}{24} R''(a)}$$

Bezeichnen wir mit u_1 einen der Werthe von u, für welchen $p(u-u_0)$ den Werth $\frac{1}{24} R''(a)$ annimmt, also:

$$21) \quad p(u_1 - u_0) = \frac{1}{24} R''(a),$$

"Taschenausgabe"

$$\wp u - \wp v = \frac{\sigma(u+v)\cdot\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\, \sigma^2 v}$$

so wird:

$$x = a + \frac{\frac{1}{4} R'(a)}{p(u-u_0) - p(u_1-u_0)}$$

$$22) \quad = a - \frac{1}{4} R'(a) \frac{\sigma^2(u-u_0)\,\sigma^2(u_1-u_0)}{\sigma(u+u_1-2u_0)\,\sigma(u-u_1)}$$

Es ist mithin $x-a$ eine gewöhnliche elliptische Function zweiten Grades mit der zweifachen Null-

stelle $u = u_0$ u. den beiden einfachen Unendlich $u = 2u_0 - u_1$ u. $u = u_1$. Sobald daher die beiden Werthe u_0 u. u_1 gegeben sind, kann man unmittelbar den Werth von $x - a$ aufstellen. Es lässt sich jedoch x noch in andrer Form darstellen. Schreiben wir nämlich den Werth von x, (20), wie folgt:

$$x = a \frac{s - c}{s - \frac{1}{24} R''(a)},$$

worin c eine ganz bestimmte Constante bedeutet, so wird es auch einen Werth von u geben, für welchen $s = c$ wird. Derselbe sei mit u' bezeichnet, also $\wp(u' - u_0) = c$; dann ist:

$$x = a \frac{\wp(u - u_0) - \wp(u' - u_0)}{\wp(u - u_0) - \wp(u_1 - u_0)}$$

woraus folgt:

$$x = C \frac{\sigma(u - u')\sigma(u + u' - 2u_0)}{\sigma(u - u_1)\sigma(u + u_1 - 2u_0)}$$

$\sigma^2(u_1 - u_0)$ & $\sigma^2(u' - u_0)$ sind Constanten und in C enthalten

oder wenn $u_2 = -u_1 + 2u_0$ gesetzt wird:

$$23, \quad x = C \frac{\sigma(u - u')\sigma(u + u' + u_1 - u_2)}{\sigma(u - u_1)\sigma(u - u_2)}$$

Es wird mithin x gleich 0 an den Stellen $u = u'$ u. $u = -u' + u_1 + u_2$ u. unendlich an den Stellen $u = u_1$ u. $u = u_2$. Die Constante C ist bestimmt, sobald der Werth von x für irgend einen Werth von u gegeben ist. Um nun die Grössen u_1 u_2 u' zu bestimmen, ist es natürlich nicht nöthig, die obige Transformation auszuführen,

denn sobald für irgend einen Werth von u der Werth von x u. der Werth von $\frac{dx}{du}$ gegeben ist, ist x vollständig durch die gegebene Differentialgleichung bestimmt, also von der gemachten Transformation durchaus unabhängig. Es müssen sich daher die Grössen u_1 u_2 u' noch auf andre Weise mit Hilfe der Differentialgleichung definiren lassen. Setzt man nun z. B. fest, dass für $u = 0$ $x = a$ werden solle, so ergiebt sich aus der gegebenen Differentialgleichung:

$$u = \int_a \frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

wodurch u eindeutig definirt ist, sobald noch über den Werth von $\sqrt{R(x)}$ eine bestimmte Annahme gemacht ist (eindeutig natürlich bis auf Vielfache gewisser Constanten). Da nun u_1 einer der beiden Werthe ist, wofür $x = \infty$ wird, so ist:

$$u_1 = \int_a^\infty \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

Dabei ist die Integration auf irgend einem Wege von a bis ins Unendliche fortzuführen für $x = \infty$ nimmt das Integral, abgesehen noch von gewissen Constanten, ebenfalls zwei Werthe an, da sich, wie aus der Entwicklung:

$$R(x) = Ax^4\left(1 + 4\frac{B}{A}x^{-1} + \ldots\right)$$

hervorgeht, $\frac{\sqrt{R(x)}}{x^2}$ sowohl dem Werthe $+\sqrt{A}$ als dem Werthe $-\sqrt{A}$ nähern kann. Der eine Werth, welchen jenes Integral annimmt, ist dann mit u_1, der andre mit u_2 zu bezeichnen. – In ganz analoger Weise ergeben sich die Werthe von u, für welche $x = 0$ wird, nämlich:

$$u' = \int_a^0 \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

Dieses Integral besitzt wiederum zwei Werthe, welche die Nullstellen der Function $x = \varphi(u)$ ergeben. Man kann daher unabhängig von der gemachten Transformation die Null- u. Unendlichkeitsstellen von x auch durch bestimmte Integrale definiren.

Wir leiten nun noch eine Hauptformel ab, welche sich aus der Relation:

$$\frac{\sigma'(u-v)}{\sigma(u-v)} = \frac{\sigma' u}{\sigma u} - \frac{\sigma' v}{\sigma v} + \frac{1}{2}\,\frac{\wp' u + \wp' v}{\wp u - \wp v}$$

ergibt. Vertauscht man nämlich hierin u u. v resp. mit v u. w, sodann mit w u. u u. addirt diese drei Gleichungen, so entsteht:

$$24)\quad \frac{\sigma'(u-v)}{\sigma(u-v)} + \frac{\sigma'(v-w)}{\sigma(v-w)} + \frac{\sigma'(w-u)}{\sigma(w-u)} = \frac{1}{2}\,\frac{\wp' u + \wp' v}{\wp u - \wp v} + \frac{1}{2}\,\frac{\wp' v + \wp' w}{\wp v - \wp w} + \frac{1}{2}\,\frac{\wp' w + \wp' u}{\wp w - \wp u}$$

Es ist nun wichtig zu bemerken, dass diese Formel auch gilt, wenn man an die Stelle von $\wp u$

eine beliebige elliptische Function zweiten Grades setzt, also z. B. unser x. Um dies nachzuweisen schreiben wir vorstehende Gleichung zunächst in der Form:

$$24^a)\quad \frac{\sigma'(u-v)}{\sigma(u-v)}+\frac{\sigma'(v-w)}{\sigma(v-w)}+\frac{\sigma'(w-u)}{\sigma(w-u)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u}\log(pu-pv)-\frac{\partial}{\partial v}\log(pu-pv)\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial v}\log(pv-pw)-\frac{\partial}{\partial w}\log(pv-pw)\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial w}\log(pw-pu)-\frac{\partial}{\partial u}\log(pw-pu)\right)$$

Zunächst ist ersichtlich, dass unsre Formel bestehen bleibt, wenn man von jeder der Grössen $u\ v\ w$ dieselbe Grösse u_0 subtrahirt, da hierdurch die linke Seite ungeändert bleibt.

Eine allgemeine elliptische Function zweiten Grades stellt sich dar in der Form:

$$x = \frac{\alpha s+\beta}{\gamma s+\delta},$$

worin $s = p(u-u_0)$ gesetzt ist. Wir wollen daher setzen, um möglichste Symmetrie herzustellen:

$$25)\quad x = \frac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta},\quad y = \frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta},\quad z = \frac{\alpha\zeta+\beta}{\gamma\zeta+\delta}$$
$$\xi = p(u-u_0),\quad \eta = p(v-u_0),\quad \zeta = p(w-u_0)$$

Mit Hilfe der letzteren Bezeichnung können wir obige Formel auch so schreiben:

$$24^b)\quad \frac{\sigma'(u-v)}{\sigma(u-v)}+\frac{\sigma'(v-w)}{\sigma(v-w)}+\frac{\sigma'(w-u)}{\sigma(w-u)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\log(\xi-\eta)}{\partial u}-\frac{\partial\log(\xi-\eta)}{\partial v}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\log(\eta-\zeta)}{\partial v}-\frac{\partial\log(\eta-\zeta)}{\partial w}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\log(\zeta-\xi)}{\partial w}-\frac{\partial\log(\zeta-\xi)}{\partial u}\right)$$

Nun ist:

$$x - y = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(\xi - \eta)}{(\gamma\xi + \delta)(\gamma\eta + \delta)}, \quad \text{folglich:}$$

$$\frac{\partial \log(x-y)}{\partial u} - \frac{\partial \log(x-y)}{\partial v} = \frac{\partial \log(\xi-\eta)}{\partial u} - \frac{\partial \log(\xi-\eta)}{\partial v} - \frac{\partial \log(\gamma\xi+\delta)}{\partial u} + \frac{\partial \log(\gamma\eta+\delta)}{\partial v}$$

ebenso:

$$\frac{\partial \log(y-z)}{\partial v} - \frac{\partial \log(y-z)}{\partial w} = \frac{\partial \log(\eta-\zeta)}{\partial v} - \frac{\partial \log(\eta-\zeta)}{\partial w} - \frac{\partial \log(\gamma\eta+\delta)}{\partial v} + \frac{\partial \log(\gamma\zeta+\delta)}{\partial w}.$$

$$\frac{\partial \log(z-x)}{\partial w} - \frac{\partial \log(z-x)}{\partial u} = \frac{\partial \log(\zeta-\xi)}{\partial w} - \frac{\partial \log(\zeta-\xi)}{\partial u} - \frac{\partial \log(\gamma\zeta+\delta)}{\partial w} + \frac{\partial \log(\gamma\xi+\delta)}{\partial u}$$

Addirt man nun die letzten drei Gleichungen, so erhält man auf der rechten Seite gerade den mit 2 multiplicirten Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (24^b). Mithin wird:

$$\frac{\sigma'(u-v)}{\sigma(u-v)} + \frac{\sigma'(v-w)}{\sigma(v-w)} + \frac{\sigma'(w-u)}{\sigma(w-u)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \log(x-y)}{\partial u} - \frac{\partial \log(x-y)}{\partial v}\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \log(y-z)}{\partial v} - \frac{\partial \log(y-z)}{\partial w}\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \log(z-x)}{\partial w} - \frac{\partial \log(z-x)}{\partial u}\right)$$

oder wenn man $x = \varphi(u)$ setzt:

$$26)\quad \frac{\sigma'(u-v)}{\sigma(u-v)} + \frac{\sigma'(v-w)}{\sigma(v-w)} + \frac{\sigma'(w-u)}{\sigma(w-u)} = \frac{1}{2}\,\frac{\varphi'(u)+\varphi'(v)}{\varphi(u)-\varphi(v)} + \frac{1}{2}\,\frac{\varphi'(v)+\varphi'(w)}{\varphi(v)-\varphi(w)} + \frac{1}{2}\,\frac{\varphi'(w)+\varphi'(u)}{\varphi(w)-\varphi(u)}$$

Hiermit ist aber unsre Behauptung erwiesen. Wir können also sagen: Durch die Differentialgleichung $\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x)$, wo $R(x)$ vom dritten oder vierten Grade ist, wird eine allgemeine elliptische Function zweiten Grades definirt. Zu dieser Function $\varphi(u)$ gehören zwei Invarianten g_2 u. g_3,

deren Werthe sich aus den Coefficienten von $R(x)$ mittelst der Formeln (14) bestimmen.
Bildet man nun mit Hilfe dieser Invarianten die Function σu, so besteht zwischen dieser u. der Function $\varphi(u)$ die Gleichung (26). Dabei ist vorausgesetzt, dass von den Werthen von $u\, v\, w$ keine zwei einander congruent sind, da sonst auf der linken Seite einer der Nenner verschwinden würde.

Aus dieser Gleichung (26) ergeben sich noch andre durch Specialisirung der Grössen w u. v. Nehmen wir z. B. an, dass w einer der Werthe sei, wofür $\varphi(u) = \infty$ wird, .. als solcher werde w mit u_1 bezeichnet.. , & während v willkürlich, nur nicht congruent u_1 gewählt werden soll, so folgt zunächst aus obiger Gleichung:

$$\frac{\sigma'(u-v)}{\sigma(u-v)} - \frac{\sigma'(u-u_1)}{\sigma(u-u_1)} + \frac{\sigma'(v-u_1)}{\sigma(v-u_1)} = \frac{1}{2}\,\frac{\varphi' u + \varphi' v}{\varphi u - \varphi v} + \frac{1}{2} \lim \frac{\varphi' w}{(\varphi w)^2}(\varphi u - \varphi v)$$

Nun ist:

$$\varphi'^2 w = A\varphi^4 w + 4B\varphi^3 w + 6C\varphi^2 w + 4B'\varphi w + A'$$

$$\left(\frac{\varphi' w}{\varphi^2 w}\right)^2 = A + \frac{4B}{\varphi w} + \dots$$

mithin:

$$27)\quad \lim_{w=u_1} \frac{\varphi' w}{\varphi^2 w} = \pm\sqrt{A}$$

Verstehen wir daher unter u_1 gerade denjenigen Werth von u, für welchen sich dieser Quotient der

Grenze $+\sqrt{A}$ nähert, also:

$$\lim_{w=u_1} \frac{\varphi' w}{\varphi^2 w} = +\sqrt{A}$$

so geht obige Gleichung über in:

$$28) \quad \frac{\sigma'(u-v)}{\sigma(u-v)} - \frac{\sigma'(u-u_1)}{\sigma(u-u_1)} + \frac{\sigma'(v-u_1)}{\sigma(v-u_1)} = \frac{1}{2}\,\frac{\varphi' u + \varphi' v}{\varphi u - \varphi v} + \frac{1}{2}\sqrt{A}\,(\varphi u - \varphi v)$$

Diese Gleichung ist besonders bemerkenswerth in dem Falle, wo $A = 0$, also die Function $R(x)$ nur vom dritten Grade ist, da in diesem Falle die vorstehende Gleichung unmittelbar zur Integration geeignet ist.

Ist $R(x)$ nur vom dritten Grade, so sind die Werthe, wofür $\varphi u = \infty$ wird alle unter einander congruent, denn da in diesem Falle $\varphi(u)$ nach Gl. (16) sich darstellt in der Form:

$$29) \quad \varphi u = \alpha\, p(u-u_0) + \beta,$$

so kann φu nur dann unendlich groß werden, wenn $p(u-u_0) = \infty$ ist d.h. wenn $u-u_0$ gleich einer Periode ist. Jede dieser Unendlichkeitsstellen ist aber dann vom zweiten Grade, da die Entwicklung von φu nach Potenzen von $u-u_0$ mit der zweiten Potenz beginnt. – Ist dagegen $A (=) 0$, so stellt sich nach Gl. (25) φu dar in der Form:

$$30) \quad \varphi(u) = \frac{\alpha\, p(u-u_0) + \beta}{\gamma\, p(u-u_0) + \delta}$$

Es wird daher $\varphi(u)$ nur unendlich für denjenigen Werth von u, für welchen: $p(u-u_0) = -\frac{\delta}{\gamma}$ ist. Da aber $p(u-u_0)$ eine gerade Function ist, so ist ersichtlich, dass es zwei Werthe von u gibt, für welche $p(u-u_0)$ diesen Werth annimmt. Dieselben unterscheiden sich dadurch von einander, dass für sie $\sqrt{A}$ entgegengesetzte Werthe annimmt. Aus Gl. (30) folgt nämlich:

$$p(u-u_0) = \frac{\beta - \delta\varphi u}{\gamma\varphi u - \alpha}$$

$$p'(u-u_0) = \frac{\alpha\delta - \gamma\beta}{(\gamma\varphi u - \alpha)^2}\,\varphi' u$$

$$= \frac{\alpha\delta - \gamma\beta}{\gamma^2\left(1 - \frac{\alpha}{\gamma\varphi u}\right)^2}\;\frac{\varphi' u}{\varphi^2 u}$$

Nimmt man nun u in der Nähe eines der Werthe an, für welche $\varphi u = \infty$ ist, so nähert sich $\frac{\varphi' u}{\varphi^2 u}$ der Grenze $\pm\sqrt{A}$, also haben wir, wenn wir denjenigen Werth, wofür diese Grenze $-\sqrt{A}$ ist, mit u_2 bezeichnen:

$$31)\quad \begin{array}{l} p'(u_1 - u_0) = \frac{\alpha\delta - \gamma\beta}{\gamma^2}\sqrt{A} \\ p'(u_2 - u_0) = \frac{\alpha\delta - \gamma\beta}{\gamma^2}\sqrt{A} \end{array}\;,\quad p\left(\begin{array}{c}u_1\\u_2\end{array} - u_0\right) = -\frac{\delta}{\gamma}.$$

Es gibt also in dem Falle, wo $A\,(=)\,0$ ist, zwei einander nicht congruente Werthe von u, u_1 u. u_2, wofür die Function $\varphi(u) = \infty$ ist aber für jeden derselben nur mit der Ordnungszahl 1. Diesen beiden

Werthen von u gehören entgegengesetzte Werthe von $\sqrt{A}$ zu. Mithin folgt aus der Gleichung (28), wenn man darin statt u_1 u_2 einführt:

$$32)\quad \frac{\sigma'(u-v)}{\sigma(u-v)} - \frac{\sigma'(u-u_2)}{\sigma(u-u_2)} + \frac{\sigma'(v-u_2)}{\sigma(v-u_2)} = \frac{1}{2}\,\frac{\varphi' u+\varphi' v}{\varphi u-\varphi v} - \frac{1}{2}\sqrt{A}(\varphi u-\varphi v)$$

Subtrahirt man jetzt diese Gleichung von (28) so kommt:

$$33)\quad \sqrt{A}(\varphi u-\varphi v) = \frac{\sigma'(u-u_2)}{\sigma(u-u_2)} - \frac{\sigma'(u-u_1)}{\sigma(u-u_1)} - \frac{\sigma'(v-u_2)}{\sigma(v-u_2)} + \frac{\sigma'(v-u_1)}{\sigma(v-u_1)}$$

Diese Gleichung enthält noch die willkürliche Constante v. Dieselbe kann unter andern so bestimmt werden, dass $\varphi v = 0$ ist. Bezeichnen wir diesen besonderen Werth von v mit v_1, so ist:

$$34)\quad \sqrt{A}\,\varphi u = \frac{\sigma'(u-u_2)}{\sigma(u-u_2)} - \frac{\sigma'(u-u_1)}{\sigma(u-u_1)} - \frac{\sigma'(v_1-u_2)}{\sigma(v_1-u_2)} + \frac{\sigma'(v_1-u_1)}{\sigma(v_1-u_1)}$$

u. diese Formel dient dazu, das Integral über φu selbst auszuführen. Mittelst derselben wird φu in dem Falle wo $A (=) 0$ ist, dargestellt bis auf constante Glieder durch Ableitungen von $\log\sigma(u-u_2)$ u. $\log\sigma(u-u_1)$. Es fragt sich, ob nicht in dem Falle, wo $A=0$ ist, eine analoge Formel stattfindet. Dies ist nun in der That der Fall; sie ist nämlich keine andre als die Gleichung (29):

$$\varphi(u) = \alpha\,\wp(u-u_0)+\beta$$

welche man auch so schreiben kann:

$$35,\quad \varphi(u) = -\alpha \frac{d^2 \log \sigma(u-u_0)}{du^2} + \beta.$$

Es tritt also dann die zweite Ableitung des $\log \sigma u$ auf.

Wir haben im Vorhergehenden die Differentialgleichung $\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x)$ auf die folgende: $\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3$ zurückgeführt u. zwar derart, dass wir festsetzten, es solle s für einen der Werthe von x, für welchen $R(x) = 0$ ist, unendlich gross werden. Dabei machte es keinen wesentlichen Unterschied, ob in $R(x)$ der erste Coefficient A gleich 0 war oder nicht. Man kann sich nun die allgemeinere Aufgabe vorlegen, die Differentialgleichung $\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x)$ in die andre $\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3$ zu transformiren, unter der Bedingung, dass s nicht gerade für eine Wurzel der Gleichung $R(x) = 0$ sondern für einen beliebig vorgeschriebenen Werth x_0 von x unendlich gross werden solle u. dass zugleich über das entsprechende Zeichen von $\sqrt{R(x)}$ beliebig disponirt werden kann. Dass es für s einen solchen Ausdruck geben muss, welcher für $x = x_0$ unendlich gross wird, lässt sich mit Hilfe des Additionstheoremes einsehen. Man kann nämlich zunächst die ursprüngliche Differentialglei-

chung zurückführen auf eine von der Form $\left(\frac{ds_1}{du}\right)^2 = S_1$ mit Hilfe der oben gegebenen Transformation, so dass also s_1 unendlich wird, wenn x einen der Werthe annimt, wofür $R(x)$ verschwindet. Diese Transformation d.h. das allgemeine Integral der letzteren Gleichung ist von der Form:

$$s_1 = \wp(u-u_0) = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$$

Setzt man nun $s = \wp u$, so genügt s genau derselben Differentialgleichung wie s_1, wird aber unendlich für $u=0$, während s_1 für $u=u_0$ unendlich gross ist. Gehört daher zum Werthe $u=0$ der Werth $x=x_0$, so wird:

$$\wp u_0 = \frac{\alpha x_0+\beta}{\gamma x_0+\delta}$$

u. es wird s unendlich gross werden, sobald x den Werth x_0 annimmt. Dieses zeigt sich denn auch in dem Ausdrucke, den man für s mittelst des Additionstheoremes erhält. Es ist nämlich:

$$s = \wp u = \wp((u-u_0)+u_0) = \frac{(\wp(u-u_0)+\wp u_0)(2\wp(u-u_0)\wp u_0 - \frac{1}{2}g_2) - g_3 - \wp'(u-u_0)\wp' u_0}{2(\wp(u-u_0)-\wp u_0)^2}$$

Ferner ist:

$$\wp'(u-u_0) = \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\gamma x+\delta)^2}\sqrt{R(x)}$$

$$\wp' u_0 = \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\gamma x_0+\delta)^2}\sqrt{R(x_0)}$$

wo unter $\sqrt{R(x)}$ gerade derjenige Werth von $\frac{dx}{du}$ zu verstehen ist, welcher das vorgeschriebene Zeichen be-

sirt. Setzt man daher die Werthe von $p(u-u_0)$, pu_0, $p'(u-u_0)$, $p'u_0$ in den Ausdruck für s ein, so erhält derselbe die Gestalt:

$$36)\quad s = pu = \frac{(x, x_0) + \varepsilon\sqrt{R(x)}\sqrt{R(x_0)}}{2\,(x-x_0)^2},$$

worin (x, x_0) eine ganze in x u. x_0 symetrische Function zweiten Grades u. ε eine Constante bedeutet. Mithin lässt sich die Differentialgleichung $\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x)$ in die andre $S = \left(\frac{ds}{du}\right)^2$ überführen, so dass $s=\infty$ wird für einen beliebig gegebenen Werth x_0 von x u. dass zugleich über das Vorzeichen des zugehörigen Werthes von $\sqrt{R(x)}$ willkürlich verfügt werden kann.

Diese Bemerkung ist deshalb von besonderer Wichtigkeit, weil sie einen zweiten Ausgangspunkt bildet für die Behandlung der elliptischen Functionen. Im Vorhergehenden sind wir nämlich ausgehend von den σ-Functionen zur Formel (36) gelangt. Wenn man nun aber eine derartige Formel wie (36) a priori ableiten, also beweisen kann, dass sich die Gleichung $du = \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$ unter allen Umständen in die andre $du = -\frac{ds}{\sqrt{S}}$ transformiren lässt, so kann man daraus unmittelbar die Existenz eines Additionstheoremes für die Function pu nachweisen u. so die Theorie der ellipti-

schen Functionen begründen. Ausgehend von der Differentialgleichung $\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3$ zeigten wir nämlich, dass es für kleine Werthe von u eine Potenzreihe $\wp u$ gibt, welche dieser Differentialgleichung genügt u. die Eigenschaft besitzt für $u = 0$ unendlich gross zu werden. Von dieser so definirten Function $\wp u$ konnten wir dann ferner beweisen, dass für sie ein Additionstheorem besteht. Auf Grund desselben ergab sich dann, dass aus dieser Function $\wp u$ durch Fortsetzung eine eindeutige Function entspringt, welche darstellbar ist in der Form eines Quotienten aus zwei beständig convergirenden Potenzreihen. Damit war zugleich die allgemeinste Definition einer elliptischen Function gegeben. Die Schwierigkeit, die bei diesem Gange der Untersuchung in der Theorie dieser Functionen hervortritt, besteht einzig u. allein darin, eine richtige Einsicht in die eigentliche Natur der durch jene Differentialgleichung definirten Functionen zu erlangen. Sie ist auch der Grund der langsamen Entwicklung der Theorie gewesen. Denn obwohl Jacobi diese Schwierigkeit kannte u. ihretwegen den in den „fundamenta nova..“ eingeschlagenen Weg verliess u. in seinen späteren

Vorlesungen die Theorie der elliptischen Functionen ausgehend von den ϑ-Functionen behandelte, vermochte er doch nicht dieselbe zu beseitigen. Legendre u. Jacobi gingen aus von der Untersuchung des Integrals:

$$u = \int_0 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

worin k reell u. kleiner als 1 u. die Integration so auszuführen ist, dass für $x = 0$ der Werth der Quadratwurzel gleich $+1$ ist. Auf diese Form hatte Legendre das Integral:

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

unter der Bedingung zurückgeführt, dass die Coefficienten von $R(x)$ reell seien. Das erste Integral bot nun keine Schwierigkeit dar, wenn man dem x nur reelle Werthe zwischen -1 u. $+1$ beilegte. Denn sobald festgesetzt war, dass für $x = 0$ der Werth der Wurzel gleich $+1$ sein solle, so konnte, da die Wurzelgröße sich bis $x = \pm 1$ mit x stetig ändert, über das Vorzeichen von u kein Zweifel entstehen. Dies geschah aber, sobald x über dieses Intervall hinausging, da die Wurzelgröße zunächst gleich 0 u. dann imaginär wurde. Aber bei größerer Aufmerksamkeit konnte man schon, wenn x zwischen -1 u. $+1$

lag, einen Zeichenwechsel wahrnehmen, denn man hätte die Integration offenbar auch so ausführen können, dass man zunächst von 0 bis +1 resp. −1 u. sodann rückwärts von +1 resp. −1 zu x ging. Da nun auf diesem Wege $R(x)$ einmal gleich 0 geworden ist, so konnte auch u sein Zeichen gewechselt haben. Die beste Illustration hierzu giebt in der That die Legendre'sche Transformation:

$$u = \int_0 \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

mittelst der Substitution $x = \sin\varphi$. Beschränkt man nämlich hierbei φ nicht blos auf Werthe des ersten Quadranten, sondern lässt man φ auch Werthe des zweiten Quadranten annehmen, so ist man zwar aus dem für x festgesetzten Intervalle nicht herausgegangen, dagegen ist für den Endwerth von x $\frac{dx}{d\varphi} = \cos\varphi$ negativ geworden, d.h. es hat die Quadratwurzel ihr Zeichen geändert. Lässt man φ von 0 bis ∞ wachsen, so kann u alle reellen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen. Jacobi erkannte aber schon die Nothwendigkeit, in der Theorie der elliptischen Functionen dem Argumente u auch complexe Werthe beizulegen. Die Definition dieser Functionen für rein imaginäre Argumente

bot keine Schwierigkeit; indem man nun auf $\varphi(u+vi)$ das von Euler für reelle Werthe bewiesene Additionstheorem anwandte u. zeigen konnte, dass die so entstehende complexe Größe die Bedingungen erfüllte, welche für eine monogene Function von $u+vi$ bestehen müssen, hatte man auch die Definition für beliebige complexe Argumente gegeben, jedoch noch unter der Voraussetzung, dass die Moduln k reell u. kleiner als 1 seien.
Jacobi kam jedoch bei seinen Untersuchungen über die Transformation der elliptischen Integrale auch auf imaginäre Moduln. Indem er sich die Aufgabe vorlegte, das Legendré'sche Integral in ein anderes von ähnlicher Gestalt zu verwandeln, in welchem an die Stelle des Moduls k ein andrer λ u. an die Stelle des Winkels φ ein andrer ψ getreten ist, fand er, dass λ u. k durch eine algebraische Gleichung zusammenhängen, welche stets zwei reelle Werte von λ lieferte, von denen der eine kleiner, der andre größer als k war. Da aber jene Gleichung irreductibel war, so war es ihm klar, dass die andern Wurzeln derselben für die Transformation dieselbe Bedeutung haben mussten, wie die reellen. Es mußte also auch möglich sein, durch die ursprüngliche Gleichung eine eindeutige Function von u zu

definiren, auch wenn die Coefficienten von $R(x)$ complex waren. Dies bot aber in der ersten Zeit sehr große Schwierigkeiten dar. Indem man das allgemeine Integral der Betrachtung zu Grunde legen mußte, hatte man zunächst nachzuweisen, dass das Integral für jeden complexen Werth von x eine Bedeutung hatte, dass also die hierdurch für kleine Werthe von x definirte Function sich unbegrenzt fortsetzen ließ, ferner dass das Integral unendlich viele, aber nur in zwei Gruppen zerfallende Werte annehmen konnte, derart dass sich die einer Gruppe angehörenden Werthe nur um Vielfache gewisser Constanten unterschieden. Man hätte nun zwar schon damals, obschon man von den bestimmten Integralen mit complexen Grenzen noch wenig wußte, diese Functionen für complexe Werthe definiren u. auch zeigen können, dass man durch Hinzufügen gewisser Constanten neue Werthe der Function erhielt. Viel schwieriger aber wäre es gewesen, nachzuweisen, dass man auf diese Weise alle Werthe, welche u erhalten kann, auch wirklich erhält. Aber selbst wenn man den Integrationsweg so ausgewählt hätte, dass dieses der Fall gewesen wäre, so hätte man den Beweis der damals als sehr unwahrscheinlich erschei-

nenden Thatsache zu führen gehabt, dass trotzdem zu diesen unendlich vielen Werthen von u nur ein einziger Werth von x gehört. Jacobi sagt ausdrücklich, dass gerade diese Schwierigkeit es ihm unmöglich gemacht habe, in seinen Vorlesungen von den Integralen auszugehen, u. dass er deshalb seinen Ausgangspunkt von den ϑ-Functionen genommen habe. Aber diese Schwierigkeit fällt weg, wenn man von vornherein ganz allgemein die Existenz eines Additionstheoremes beweisen kann, da hieraus unmittelbar, ganz unabhängig von der Theorie der Integrale, folgt, dass die Functionen, für welche dasselbe existirt, eindeutige Functionen sind. Zu diesem Zwecke behandeln wir jetzt die allgemeinste Transformation der elliptischen Integrale, wir stellen uns also die Aufgabe die Differentialgleichung $\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x)$ zu transformiren in $\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3$ mit der Bedingung, dass $s = \infty$ werde für einen gegebenen Werth x_0 von x u. dass zugleich $\sqrt{S}$ ein vorgeschriebenes Zeichen erhalte. Euler, der diese Transformation zuerst machte, ging aus von der in x u. s quadratischen Gleichung:

37) $(lx^2+mx+n)s^2+(l'x^2+m'x+n')s+(l''x^2+m''x+n'') = 0$

oder:

$$38) \quad \mathcal{L}s^2 + \mathcal{M}s + \mathcal{N} = \mathcal{L}'x^2 + \mathcal{M}'x + \mathcal{N}' = 0$$

woraus folgt:

$$39) \quad (2\mathcal{L}s + \mathcal{M})\,ds + (2\mathcal{L}'x + \mathcal{M}')\,dx = 0$$

Ferner folgt aus (38):

$$40) \quad \begin{aligned} (2\mathcal{L}s + \mathcal{M})^2 &= \mathcal{M}^2 - 4\mathcal{L}\mathcal{N} = k^2 R(x) \\ (2\mathcal{L}'x + \mathcal{M}')^2 &= \mathcal{M}'^2 - 4\mathcal{L}'\mathcal{N}' = k^2 R_1(s) \end{aligned}$$

worin k^2 eine willkürliche Constante u. $R(x)$ u. $R_1(s)$ Functionen vierten Grades resp. von x u. s allein sind. Ein Wert der Quadratwurzel ist daher bestimmt durch:

$$k\sqrt{R(x)} = 2\mathcal{L}s + \mathcal{M}$$

$$k\sqrt{R_1(s)} = 2\mathcal{L}'x + \mathcal{M}'.$$

u. somit geht unsere Differentialgleichung (39) über in:

$$41) \quad \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + \frac{ds}{\sqrt{R_1(s)}} = 0$$

Damit nun $\frac{ds}{\sqrt{R_1(s)}}$ die gewünschte Form erhalte, müssen wir über die vorkomenden Constanten passend verfügen. In der Gleichung (37) komen zwar 9 Constanten vor, doch können dieselben auf 8 reducirt werden, da man die ganze Gleichung durch einen der Coefficienten dividiren kann.

Außerdem kommt noch die willkürliche Constante k vor, so dass also im Ganzen 9 Constanten zu bestimmen sind. Dazu erhält man aber auch gerade 9 Bedingungen. Soll nämlich $R(x)$ eine vorgeschriebene allgemeine Function vierten Grades werden, so

liefert dies 5 Bedingungen. Damit ferner $R_1(s)$ die Form $4s^3 - g_2 s - g_3$ annehme, müssen die Coefficienten von s^4 u. s^2 gleich 0 u. der von s^3 gleich 4 sein; dies giebt drei weitere Bedingungen, u. endlich kommt noch die letzte Bedingung hinzu, dass $s = \infty$ werden solle, wenn x einen vorgeschriebenen Werth x_0 u. die zugehörige Wurzel $\sqrt{R(x_0)}$ ein vorgeschriebenes Zeichen hat. Also im Ganzen 9 Bedingungen. Euler verfügte über die 9 Constanten so, dass die beiden Functionen $R(x)$ u. $R_1(s)$ in ihren Coefficienten identisch wurden u. überdies für einen gegebenen Werth von x auch s einen gegebenen Werth annahm, u. kam so ohne Weiteres auf das Additionstheorem der elliptischen Integrale.

Setzt man nun in:

$$k^2 R_1(s) = M'^2 - 4 L'N'$$

für $M' L' N'$ ihre Werthe in s ein, ordnet dann nach Potenzen von s, so wird, da der Coefficient von s^4 gleich 0 sein soll:

$$42) \quad m^2 - 4ln = 0.$$

Ist nun $l \,(=)\, 0$, so können wir $l = 1$ setzen, da man alsdann die Gleichung (37) durch l dividiren kann, u. es wird der Coefficient von s^2 d.h. $L = lx^2 + mx + n$ ein vollständiges Quadrat, also etwa:

$$L = (x - x_0)^2$$

Ist dagegen $l = 0$, so ist auch $m = 0$ u. man kann dann $h = 1$ setzen. Diesen Fall verschieben wir auf später. Im ersten Falle wird also:

$$k^2 R(x) = M^2 - 4(x-x_0)^2 N$$

d.h. die Differenz $M^2 - k^2 R(x)$ muß durch $(x-x_0)^2$ theilbar sein. Wir ordnen deshalb M u. $R(x)$ gleich nach Potenzen von $(x-x_0)$ u. setzen:

$$43) \quad \begin{aligned} M &= m_0 + m_1(x-x_0) + m_2(x-x_0)^2 \\ R(x) &= r_0 + r_1(x-x_0) + r_2(x-x_0)^2 + r_3(x-x_0)^3 + r_4(x-x_0)^4 \end{aligned}$$

Mithin wird:

$$M^2 - k^2 R(x) = (m_0^2 - k^2 r_0) + (2m_0 m_1 - k^2 r_1)(x-x_0) + (m_1^2 + 2m_0 m_2 - k^2 r_2)(x-x_0)^2 + (2m_1 m_2 - k^2 r_3)(x-x_0)^3 + (m_2^2 - k^2 r_4)(x-x_0)^4.$$

Da nun diese Differenz durch $(x-x_0)^2$ theilbar sein soll, so muß sein:

$$44) \quad \begin{aligned} m_0^2 - k^2 r_0 &= 0 \qquad \text{also:} \qquad m_0 = k\sqrt{r_0} \\ 2m_0 m_1 - k^2 r_1 &= 0 \qquad\qquad\qquad m_1 = k\frac{r_1}{2\sqrt{r_0}} \end{aligned}$$

Ferner setzen wir noch:

$$43) \quad N = n_0(x-x_0)^2 + n_1(x-x_0) + n_2$$

u. erhalten dann, wenn wir die Gleichung $Ls^2 + Ms + N = 0$ nach Potenzen von $(x-x_0)$ ordnen:

$$(x-x_0)^2(s^2 + m_2 s + n_2) + (x-x_0)(m_1 s + n_1) + m_0 s + n_0 = 0$$

u. daher:

$$45) \quad k^2 R_1(s) = (m_1 s + n_1)^2 - 4(m_0 s + n_0)(m_2 s + n_2 + s^2).$$

Es ist also in der That $R_1(s)$ nur noch vom dritten Grade. Damit nun hierin der Coefficient von s^3

gleich 4 sei, muss sein:

$$m_0 = -k^2$$

woraus folgt: $k^2 = r_0$ u. daher:

$$46) \quad \begin{aligned} m_0 &= -r_0 \\ m_1 &= -\frac{r_1}{2} \end{aligned}$$

Ferner soll der Coefficient von s^2 gleich 0 sein, also:

$$m_1^2 - 4m_0 m_2 - 4n_0 = 0$$

Vergleicht man ferner noch in $M^2 - k^2 R(x) = 4(x-x_0)^2 N$ die Coefficienten von $(x-x_0)^2$, so erhält man:

$$m_1^2 + 2m_0 m_2 + m_0 r_2 - 4n_0 = 0$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$46) \quad m_2 = -\frac{r_2}{6}$$

Mithin wird jetzt:

$$M = -r_0 - \frac{1}{2} r_1 (x-x_0) - \frac{1}{6} r_2 (x-x_0)^2$$

$$4N = \frac{(r_0 + \frac{1}{2}(x-x_0) r_1 + \frac{1}{6} r_2 (x-x_0)^2)^2 - r_0 R(x)}{(x-x_0)^2}$$

$$= \left(\frac{1}{4} r_1^2 - \frac{2}{3} r_0 r_2\right) + \left(\frac{1}{6} r_1 r_2 - r_0 r_3\right)(x-x_0) + \left(\frac{1}{36} r_2^2 - r_0 r_4\right)(x-x_4)^2$$

Folglich ist:

$$\begin{aligned} n_0 &= \frac{1}{16} r_1^2 - \frac{1}{6} r_0 r_2 \\ n_1 &= \frac{1}{24} r_1 r_2 - \frac{1}{4} r_0 r_3 \\ n_2 &= \frac{1}{144} r_2^2 - \frac{1}{4} r_0 r_4 \end{aligned}$$

Da nun noch

$$\begin{aligned} -r_0 g_2 &= 2m_1 n_1 - 4m_0 n_2 - 4n_0 m_2 \\ -r_0 g_3 &= n_1^2 - 4n_0 n_2 \end{aligned}$$

ist, so wird:

$$g_2 = r_0 r_4 + \frac{1}{12} r_2^2 - \frac{1}{4} r_1 r_3$$

$$g_3 = \frac{1}{48} r_1 r_2 r_3 - \frac{1}{16} r_0 r_3^2 - \frac{1}{216} r_2^3 - \frac{1}{16} r_1^2 r_4 + \frac{1}{6} r_0 r_2 r_4$$

Nun ist aber:

$$r_0 = R(x_0) = R(x_0)$$

$$r_1 = R'(x_0) = 4 R_1(x_0)$$

$$r_2 = \frac{1}{2} R''(x_0) = 6 R_2(x_0)$$

$$r_3 = \frac{1}{6} R'''(x_0) = 4 R_3(x_0)$$

$$r_4 = \frac{1}{24} R''''(x_0) = R_4(x_0)$$

Hiernach werden die Werthe von g_2 u. g_3:

$$g_2 = R(x_0) \cdot R_4(x_0) - 4 R_1(x_0) \cdot R_3(x_0) + 3 R_2^2$$

$$g_3 = R(x_0) \cdot R_2(x_0) R_4(x_0) + 2 R_1(x_0) \cdot R_2(x_0) \cdot R_3(x_0) - R(x_0) \cdot R_3^2(x_0) - R_4(x_0) R_1^2(x_0) - R_2^3(x_0).$$

Dies sind aber genau dieselben Ausdrücke, die wir oben pag. (8) für g_2 u. g_3 erhalten u. von denen wir nachgewiesen haben, dass sie von x u. somit auch von x_0 vollständig unabhängig sind. Mithin erhalten wir für diese Invarianten dieselben Werthe, wie dort, nämlich:

$$47) \quad \begin{aligned} g_2 &= A A' - 4 B B' + 3 C^2 \\ g_3 &= A C A' + 2 B C B' - A B'^2 - A' B^2 - C^3. \end{aligned}$$

Hiermit ist die Function $R_1(s)$ vollständig bestimmt u. zwar von der gewünschten Form $4s^3 - g_2 s - g_3$. Es handelt sich nur noch darum den Werth von s, ausgedrückt in x, zu finden. Nun war:

$$2 L s + M = k \sqrt{R(x)}$$

mithin, da $L = (x - x_0)^2$, $k = \sqrt{r_0} = \sqrt{R(x_0)}$ ist:

$$48) \quad s = \frac{-M + \sqrt{R(x_0)}\sqrt{R(x)}}{2(x - x_0)^2}$$

Dabei ist:

$$49^{a}) \quad -M = R(x_0) + 2R_1(x_0)(x - x_0) + R_2(x_0)(x - x_0)^2$$

oder:

$$49^{b}) \quad -M = Ax^2x_0^2 + 2Bxx_0(x + x_0) + 6Cxx_0 + 2B'(x + x_0) + A' + C(x - x_0)^2.$$

Hieraus folgt, dass auch die Bedingung erfüllt ist, dass für den beliebig gegebenen Werth x_0 von x $s = \infty$ werden solle, u. zwar geschieht dies nur für den einen einzigen Werth $x = x_0$. Es bleibt also nur noch das Zeichen von $\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}$ zu bestimmen. Dies geschieht am einfachsten, wenn man die Ableitung $\frac{ds}{dx}$ bildet. Dazu bringen wir aber den Ausdruck für s zuerst auf die Form:

$$48^{a}) \quad s = \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{R(x)} + \sqrt{R(x_0)}}{x - x_0}\right)^2 - \frac{1}{4}A(x + x_0)^2 - B(x + x_0) - C$$

u. hieraus folgt nach einiger Rechnung:

$$50) \quad -\sqrt{R(x)}\frac{ds}{dx} = \sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3} = \left(\frac{R(x)}{(x - x_0)^3} - \frac{\frac{1}{4}R'(x)}{(x - x_0)^2}\right)\sqrt{R(x_0)} - \left(\frac{R(x_0)}{(x_0 - x)^3} - \frac{\frac{1}{4}R'(x_0)}{(x_0 - x)^2}\right)\sqrt{R(x)}$$

Hierdurch ist der Werth der Wurzel $\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3} = \sqrt{S}$ bestimmt. Dabei ist den beiden Wurzeln $\sqrt{R(x)}$ u. $\sqrt{R(x_0)}$ dasselbe Zeichen u. zwar dasjenige beizulegen, welches $\sqrt{R(x)}$ in der ursprünglichen Gleichung hat. Wäre nämlich für $x = x_0$ $\sqrt{R(x)} = -\sqrt{R(x_0)}$ so würde wie aus Gl. hervorgeht, s nicht unendlich gross werden. Mithin können wir das Resultat folgendermaßen zusammen-

fassen:

Soll die Differentialgleichung:

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4B'x + A' = R(x)$$

in eine andre von der Form:

$$\frac{ds}{du} = -\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3} = -\sqrt{S}$$

unter der Bedingung übergeführt werden, dass für einen vorgeschriebenen Werth der zugehörigen Quadratwurzel $s = \infty$ werde, so setze man für s den Ausdruck (48), berechne die Invarianten g_2 u. g_3 aus den Gleichungen (47) u. bestimme den Werth von $\sqrt{S}$ aus der Gleichung (50), in welcher $\sqrt{R(x)}$ u. $\sqrt{R(x_0)}$ dasselbe Zeichen besitzen.

Ueber diese für die elliptischen Integrale charakteristische Transformation sei noch Folgendes bemerkt:

1) der früher pag. 11. behandelte Fall, dass x_0 eine der Wurzeln der Gleichung $R(x) = 0$ sei, ist natürlich hierin enthalten. Denn setzt man $R(x_0) = 0$, $x_0 = a$, so wird, wie aus (48) mit Hilfe von (49^a) folgt:

$$s = \tfrac{1}{2} R_2(a) + \frac{R_1(a)}{x-a}$$

$$s = \frac{\tfrac{1}{4} R'(a)}{x-a} + \tfrac{1}{24} R''(a)$$

$$\sqrt{S} = -\frac{\tfrac{1}{4} R'(a)}{(x-a)^2} \sqrt{R(x)} \quad \text{oder} \quad \sqrt{R(x)} = -\frac{\tfrac{1}{4} R'(a)}{\left(s - \tfrac{1}{24} R''(a)\right)^2} \sqrt{S},$$

also genau dieselben Formeln wie pag. 11.

2) Wir hatten oben den speciellen Fall unberücksichtigt gelassen, wo $l = m = 0$ war. Dann ist $x_0 = \infty$;

dies folgt daraus, dass x_0 für den Fall $m^2 - 4ln = 0$ die Wurzel der Gleichung $L = lx^2 + mx + n = 0$ war; da sich nun diese für $l = 0$ $m = 0$ um zwei Einheiten in ihrem Grade erniedrigt, so muss für diesen Fall die Wurzel x_0 unendlich gross sein. Wir erhalten dann aus (48) u. (50) die für diesen Fall geltenden Formeln durch einen einfachen Grenzübergang, sobald wir den Werth von $\lim\limits_{x_0 = \infty} \frac{\sqrt{R(x_0)}}{x_0^2} = \pm\sqrt{A}$ bestimmt haben. Nehmen wir diesen gleich $+\sqrt{A}$ an, so erhalten wir:

$$51.\quad \begin{cases} s = \dfrac{\sqrt{A}\,\sqrt{R(x)}}{2} + \dfrac{1}{2}\left(Ax^2 + 2B + C\right). \\ \sqrt{S} = -\dfrac{1}{4}\sqrt{A}\,R'(x) + (Ax + B)\sqrt{R(x)} \end{cases}$$

Diese Formeln haben zu weitläufigen Rechnungen Veranlassung gegeben. Sie kommen nämlich zur Anwendung, wenn die Wurzeln der Gleichung $R(x) = 0$ sämtlich imaginär sind, während $R(x)$ selbst reelle Coefficienten hat. Die Functionen $\wp u$ u. σu sind dann für reelle Werthe von u ebenfalls reell. Lässt man daher in dem Integral:

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

x nur reelle Werthe durchlaufen, so kann $R(x)$ niemals sein Zeichen wechseln u. es wird somit für reelle Werthe von u durch jenes Integral eine reelle Function definirt, die aus unseren Transformationsformeln sofort zu entnehmen ist.

Wendet man aber die gebräuchlichen Substitutionsformeln oder die lineare Transformation an, so kommen in allen diesen Formeln imaginäre Constanten vor u. man hat, da das Resultat gleichwohl ein reelles ist, erst beträchtliche Rechnungen anzustellen, um es auf diese Form zu bringen.

3) Aus den Formeln (51) folgen auch unmittelbar die Formeln (16) für den Fall, dass $A = 0$ u. $x = x_0$ ist, nämlich:

$$s = Bx + \tfrac{1}{2}C$$

$$\sqrt{S} = B\sqrt{R(x)}$$

4) Es lässt sich zwar immer auch x ausdrücken durch s u. $\sqrt{S}$, wie aus den allgemeinen Transformationsformeln ersichtlich ist, jedoch werden diese Ausdrücke etwas complicirt, u. außerdem sind dieselben von nur geringer practischer Bedeutung, da sie selten gebraucht werden.

5) Wir wollen noch einen synthetischen Beweis für unsere Formeln geben. Setzen wir nämlich:

$$-M = R(x, x_0)$$

so besitzt diese Function folgende Eigenschaften:

$$R(x, x) = R(x)$$

$$\left(\frac{\partial R(x, x_0)}{\partial x}\right)_{x_0 = x} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial R(x)}{\partial x}$$

Hieraus aber folgt ohne Weiteres, dass der Ausdruck:

$$52) \quad R^2(x,x_0) - R(x_0)\cdot R(x) = 4(x-x_0)^2 \bar{R}(x,x_0)$$

durch $(x-x_0)^2$ theilbar sein muss. In der That ist $\bar{R}(x,x_0)$ eine ganze Function, nämlich:

$$\bar{R}(x,x_0) = (B^2 - AC)x^2x_0^2 + (BC - AB')xx_0(x+x_0) + \tfrac{1}{4}(C^2 - AA')(x+x_0)^2$$
$$+ 2(C^2 - BB')xx_0 + (B'C - A'B)(x+x_0) + B'^2 - A'C.$$

Nun lautete die Formel für s:

$$s = \frac{R(x,x_0) + \sqrt{R(x)}\sqrt{R(x_0)}}{2(x-x_0)^2}$$

woraus folgt:

$$\left(2s(x-x_0)^2 - R(x,x_0)\right)^2 = R(x)\cdot R(x_0)$$

u. daher wegen Gl. (52)

$$53) \quad s^2(x-x_0)^2 - sR(x,x_0) + \bar{R}(x,x_0) = 0$$

Hiermit ist aber im Wesentlichen der Beweis geliefert. Denn vermöge dieser Gleichung sehen wir, dass zwischen s u. x eine Gleichung besteht, welche in Bezug auf beide vom zweiten Grade ist. Ordnen wir diese nach Potenzen von x, also:

$$L'x^2 + M'x + N' = 0$$

u. setzen dann:

$$M'^2 - 4L'N' = k^2 R_1(s) = R(x_0)S,$$

so erhalten wir hieraus S unmittelbar in der gewünschten Form u. daher auch sofort g_2 u. g_3 ausgedrückt durch die Coefficienten der gegebenen Function $R(x)$.

Dieses letztere Verfahren, welches an den gegebenen Ausdruck (48) für s anknüpft, setzt aber eine genau-

ere Kenntniss der Theorie der Formen vierten Grades voraus. Ist man nämlich in dieser auf den Ausdruck (48) gekommen, so wird man denselben auch, wie hier geschehen, vermöge der ihm eigenthümlichen Eigenschaften unmittelbar zur Transformation der elliptischen Integrale verwerthen können.

Wir gehen jetzt noch einmal auf die Darstellung von $x = \varphi(u)$ durch σ-Functionen zurück. Es war:

$$54) \qquad \varphi(u) - \varphi(u_0) = C \frac{\sigma(u-u_0)\,\sigma(u+u_0-u_1-u_2)}{\sigma(u-u_1)\,\sigma(u-u_2)}$$

Ist die Function $R(x)$ gegeben, so sind damit 5 Constanten bekannt; ausserdem muss noch eine gewisse Integrationsconstante u. der zugehörige Werth der Quadratwurzel gegeben sein, wenn die Lösung der Differentialgleichung eine vollständig bestimmte sein soll. Es sind also im Ganzen 6 Constanten gegeben. Nun kommen in Formel (54) als Constanten vor einmal die beiden Invarianten der σ-Functionen, sodann die Grössen u_0 u_1 u_2 u. C, also ebenfalls 6 Constanten; es muss daher möglich sein, die letzteren durch die gegebenen auszudrücken. Als willkürliche Constante wollen wir einen der Werthe nehmen, wofür $\varphi(u) = \infty$ wird, z. B. u_1, da man ja stets festsetzen kann,

dass die Function unendlich gross werden solle für einen beliebig vorgeschriebenen Werth von u_1; es bleiben dann noch u_0 u_2 u. C durch u_1 u. die Coefficienten von $R(x)$ zu bestimmen, da die Bestimmung der Invarianten g_2 u. g_3 bereits ausgeführt ist. Soll nun $s = \infty$ werden für $x = \infty$, so bestimmt sich s durch die Formel:

$$55) \quad \begin{aligned} s &= \tfrac{1}{2}\sqrt{A}\sqrt{R(x)} + \tfrac{1}{2}(Ax^2 + 2Bx + C) \\ \sqrt{S} &= -\tfrac{1}{4}\sqrt{A}\,R'(x) - (Ax + B)\sqrt{R(x)}. \end{aligned}$$

Vermittelst dieser Substitutionen wird $du = \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$ übergeführt in $du = -\frac{ds}{\sqrt{S}}$. Diese Gleichung bestimmt daher eine Function p, welche an derselben Stelle wie x d.h. für $u = u_1$ unendlich wird. Mithin ist:

$$55^a) \quad \begin{aligned} s &= \tfrac{1}{2}\sqrt{A}\sqrt{R(x)} + \tfrac{1}{2}Ax^2 + Bx + \tfrac{1}{2}C = p(u - u_1) \\ \sqrt{S} &= -\tfrac{1}{4}\sqrt{A}\,R'(x) - (Ax + B)\sqrt{R(x)} = -p(u - u_1) \end{aligned}$$

Nun ist für grosse Werthe von x:

$$\sqrt{R(x)} = \sqrt{A}\,x^2\left(1 + \frac{4B}{A}x^{-1} + \frac{6C}{A}x^{-2} + \frac{4B'}{A}x^{-3} + \frac{A'}{A}x^{-4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

oder nach dem binomischen Satze entwickelt:

$$\begin{aligned} \sqrt{R(x)} = \sqrt{A}\,x^2 + \frac{2B}{\sqrt{A}}x + \frac{3C}{\sqrt{A}} &+ \frac{2B'}{\sqrt{A}}x^{-1} + \cdots \\ - \frac{2B^2}{A\sqrt{A}} &- \frac{6BC}{A\sqrt{A}}x^{-1} - \cdots \\ &+ \frac{4B^3}{A^2\sqrt{A}}x^{-1} + \cdots \end{aligned}$$

$$56) \quad \sqrt{R(x)} = \sqrt{A}\,x^2 + \frac{2B}{\sqrt{A}}x + \frac{3AC - 2B^2}{A\sqrt{A}} + \frac{2A^2B' - 6BCA + 4B^3}{A^2\sqrt{A}}x^{-1} + \cdots$$

Nehmen wir an, dass u_1 derjenige Werth von u sei, für welchen $\lim \frac{\sqrt{R(x)}}{x^2} = +\sqrt{A}$ wird, so wird dem Werthe $u = u_2$, für welchen x ebenfalls unendlich gross wird, der Grenzwerth $\lim \frac{\sqrt{R(x)}}{x^2} = -\sqrt{A}$ entsprechen müssen. Setzen wir daher in vorstehender Entwicklung statt $\sqrt{A}$ $-\sqrt{A}$, substituiren dann den sich ergebenden Werth von $\sqrt{R(x)}$ in den Werth von s u. lassen darin $x = \infty$ werden, so erhalten wir den Werth von s für $u = u_2$ d.h. also den Werth von $\wp(u_2 - u_1)$. Dies giebt:

$$57) \qquad \wp(u_2 - u_1) = \frac{B^2 - AC}{A}$$

Hierdurch ist jedoch der Werth von u_2 noch nicht vollständig bestimmt, vielmehr müssen wir noch wissen, welches Zeichen $\wp'(u - u_1)$ für $u = u_2$ erhält. Dazu setzt man obige Entwicklung (nachdem darin $-\sqrt{A}$ statt $\sqrt{A}$ gesetzt ist) in den Werth von $\sqrt{S}$ ein u. setzt dann darin $x = \infty$. Dadurch erhält man:

$$57) \qquad \wp'(u_2 - u_1) = \frac{A^2 B' - 3ABC + 2B^3}{A\sqrt{A}}$$

Hierdurch ist nun auch nachdem das Vorzeichen von $\sqrt{A}$ so wie angegeben fixirt worden ist, das Vorzeichen von $\wp'(u_2 - u_1)$ bestimmt, u. somit die Aufgabe, u_2 aus den Coefficienten von $R(x)$ u. die gegebene Constante u_1 zu berechnen, auf die

in der Theorie vollständig gelöste Aufgabe zurückgeführt, ein Argument zu finden, für welches $\wp u$ einen gegebenen Werth u. zugleich $\wp' u$ ein vorgeschriebenes Zeichen erhält. u_0 ist einer der beiden Werthe von u, für welche $\varphi(u) - \varphi(u_0) = 0$ also $\varphi(u) = \varphi(u_0)$ wird. Ist dieser Werth $x_0 = \varphi(u_0)$ gegeben z. B. $\varphi(u_0) = 0$, so erhält man aus Gl. (55^a) den Werth von $\wp(u_0 - u_1)$, wenn man darin x_0 an die Stelle von x setzt u. kann somit auch u_0 aus x_0 u. den Coefficienten von $R(x)$ berechnen. Es bleibt somit nur noch die Bestimmung der Constanten C übrig. Diese lässt sich in folgender Weise ausführen:

Ist zunächst $A (=) 0$, so ist:

$$\varphi(u) - \varphi(u_0) = C\,\frac{\sigma(u-u_0)\,\sigma(u+u_0-u_1-u_2)}{\sigma(u-u_1)\,\sigma(u-u_2)}.$$

Entwickelt man dies nach Potenzen von $u - u_1$, so wird:

$$\varphi(u) - \varphi(u_0) = C\,\frac{\sigma(u_1-u_0)\,\sigma(u_0-u_2)}{\sigma(u_1-u_2)}\,(u-u_1)^{-1} + \ldots$$

Setzt man ferner in der Differentialgleichung $\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x)$ statt x $\frac{1}{x_1}$, so geht dieselbe über in:

$$\left(\frac{dx_1}{du}\right)^2 = A' x_1^4 + 4 B' x_1^3 + 6 C x_1^2 + 4 B x_1 + A$$

welche jetzt so zu integriren ist, dass für $u = u_1$ $x_1 = 0$ wird. Hieraus folgt für x_1 die Entwicklung (cfr. pag.   der Theorie der ell. Functionen):

$$x_1 = \pm \sqrt{A}\,(u - u_1) + \ldots$$

u. daher:

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{A}} (u - u_1)^{-1} + \cdots \quad , \text{ also}$$

$$\frac{dx}{du} = \mp \frac{1}{\sqrt{A}} (u - u_1)^{-2} + \cdots$$

woraus folgt:

$$\lim_{x=\infty} \frac{\frac{dx}{du}}{x^2} = \mp \sqrt{A}.$$

Nun sollte aber nach unsrer Festsetzung u_1 derjenige Werth sein, für welchen sich dieser Quotient dem Werthe $+\sqrt{A}$ nähert, mithin haben wir zu setzen

$$\frac{dx}{du} = + \frac{1}{\sqrt{A}} (u - u_1)^{-2} + \cdots , \text{ also } \quad x = - \frac{1}{\sqrt{A}} (u - u_1)^{-1} + \cdots$$

Durch Vergleichung der Entwicklungen von x u. $\varphi(u)$ ergibt sich:

$$C = \frac{\sigma(u_1 - u_0)}{\sqrt{A}\, \sigma(u_0 - u_1)\, \sigma(u_0 - u_2)}$$

Folglich:

$$58) \qquad \varphi(u) - \varphi(u_0) = \frac{\sigma(u_1 - u_2)\, \sigma(u - u_0)\, \sigma(u + u_0 - u_1 - u_2)}{\sqrt{A}\, \sigma(u_0 - u_1)\, \sigma(u_0 - u_2)\, \sigma(u - u_1)\, \sigma(u - u_2)}$$

Hierin sind nach dem Vorhergehenden die Grössen $u_1 - u_2$, $u_0 - u_1$, $u_0 - u_2$ als bekannt anzusehen. Diese Formel verliert offenbar ihre Giltigkeit, wenn $A = 0$ ist. Ist aber letzteres der Fall, so wird $u_2 \equiv u_1$ u. wir können schreiben:

$$\varphi(u) - \varphi(u_0) = C_1 \frac{\sigma(u - u_0)\, \sigma(u + u_0 - 2u_1)}{\sigma^2(u - u_1)}$$

Dies gibt nach Potenzen von $u - u_1$ entwickelt:

$$\varphi(u) - \varphi(u_0) = C_1\, \sigma(u_1 - u_0)\, \sigma(u_0 - u_1)\, (u - u_1)^{-2} + \cdots$$

Andrerseits ist in dem Falle, wo $A = 0$ ist u. $s = \infty$ werden soll für $x = \infty$:

$$s = Bx + \tfrac{1}{2}C \quad \text{also}$$

$$x = \frac{1}{B}s - \frac{1}{2}\frac{C}{B} = \frac{1}{B}\,p(u-u_1) - \frac{1}{2}\frac{C}{B}$$

mithin

$$x = \frac{1}{B}(u-u_1)^{-2} + \cdots$$

Durch Vergleichung beider Entwicklungen ergibt sich wieder:

$$C = -\frac{1}{B}\;\frac{1}{\sigma^2(u_0-u_1)}$$

Folglich:

$$59)\qquad \varphi(u) - \varphi(u_0) = -\frac{\sigma(u-u_0)\,\sigma(u+u_0-2u_1)}{B\,\sigma^2(u_0-u_1)\,\sigma^2(u-u_1)}$$

Hiermit sind die Formeln betreffend die Transformation resp. Integration der Differentialgleichung $\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R(x)$ vollständig abgeleitet.

Wir schließen hieran noch einige Bemerkungen über die Auflösung der Gleichungen 4t. Grades, wenn auch dieselben nicht direct mit dem Vorhergehenden zusammenhängen. Es kommt uns nämlich darauf an, zu wissen, wann die Wurzeln der Gleichung $R(x) = 0$ reell, wann imaginär sind, da sich hiernach auch die Größen e d.h. die Wurzeln der Gleichung $S = 0$ richten. Die letzteren sind sämtlich reell nicht nur in dem Falle, wo die Wurzeln von $R(x) = 0$ sämtlich reell sind, sondern auch noch, wenn diese sämtlich imaginär sind; dagegen sind zwei der Größen e conjugirt complex, die

dritte reell, wenn 2 der Wurzeln von $R(x)=0$ reell, die beiden andern conjugirt complex sind. Transformirt man eine Gleichung mit reellen Coefficienten durch eine reelle lineare Substitution, so wird offenbar die transformirte Gleichung genau so viele reelle u. imaginäre Wurzeln haben, als die ursprüngliche. Dies scheint darauf hinzudeuten, dass sich die Bedingungen für die Existenz einer gewissen Anzahl von reellen Wurzeln ausdrücken lassen durch die Invarianten der gegebenen Gleichung d.h. durch Grössen, welche durch eine solche lineare Transformation nicht geändert werden. Invarianten in diesem Sinne sind für die Formen vierten Grades nur die Ausdrücke für g_2 u. g_3, die wir gehabt haben. Wir werden sogleich sehen, in wie weit die vorige Behauptung richtig ist.

Nennt man die Wurzeln der Gleichung:

$$60) \quad R(x) = Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4B'x + A' = 0$$

$x_1\ x_2\ x_3\ x_4$, so dass also:

$$R(x) = A(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$$

ist, so gibt es unter den verschiedenen Auflösungsmethoden eine, welche diese Gleichung direct auf eine kubische Gleichung in reducirter Form zurückführt. Setzt man nämlich:

$$61) \quad \begin{aligned} \xi_1 - \xi_0 &= \tfrac{1}{4} A (x_1 - x_3)(x_2 - x_4) \\ \xi_1 - \xi_2 &= \tfrac{1}{4} A (x_1 - x_4)(x_2 - x_3) \\ \xi_2 - \xi_3 &= \tfrac{1}{4} A (x_1 - x_2)(x_3 - x_4) \end{aligned}$$

oder:

$$62) \quad \begin{aligned} \xi_1 &= \tfrac{1}{12} A\left((x_1-x_3)(x_2-x_4)+(x_1-x_4)(x_2-x_3)\right) \\ \xi_2 &= \tfrac{1}{12} A\left((x_1-x_2)(x_3-x_4)-(x_1-x_4)(x_2-x_3)\right) \\ \xi_3 &= \tfrac{1}{12} A\left(-(x_1-x_2)(x_3-x_4)-(x_1-x_3)(x_2-x_4)\right) \end{aligned}$$

u. permutirt hierin die Größen $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$ auf alle mögliche Weise, so erhält man im Ganzen nur 3 verschiedene Ausdrücke, welche bezüglich gleich den Werthen von $\xi_1\, \xi_2\, \xi_3$ sind. Es sind somit $\xi_1\, \xi_2\, \xi_3$ die drei Wurzeln einer kubischen Gleichung, welche wegen der Relation $\xi_1+\xi_2+\xi_3=0$ die Form hat:

$$4\xi^3 - g_2\xi - g_3 = 0$$

Hat man also diese Gleichung aufgelöst, so findet man aus ihren Wurzeln die Wurzeln der Gleichung $R(x)=0$ mit Hilfe der Formeln (61). Mit diesen Größen ξ hängen nun sehr eng zusammen diejenigen Functionen der vier Wurzeln $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$, auf denen die Euler'sche Auflösung der biquadratischen Gleichungen beruht. Diese sind:

$$63) \quad \begin{aligned} \eta_1 &= \tfrac{1}{4} A(x_1+x_2-x_3-x_4) \\ \eta_2 &= \tfrac{1}{4} A(x_1-x_2+x_3-x_4) \\ \eta_3 &= \tfrac{1}{4} A(x_1-x_2-x_3+x_4) \\ -B &= \tfrac{1}{4} A(x_1+x_2+x_3+x_4) \end{aligned}$$

u. aus diesen folgt:

$$64) \quad \begin{aligned} Ax_1 &= -B+\eta_1+\eta_2+\eta_3 \\ Ax_2 &= -B+\eta_1-\eta_2-\eta_3 \\ Ax_3 &= -B-\eta_1+\eta_2-\eta_3 \\ Ax_4 &= -B-\eta_1-\eta_2+\eta_3 \end{aligned}$$

Permutirt man in den Ausdrücken für $y_1 \ldots y_3$ die Größen $x_1 \ldots x_4$ auf jede mögliche Weise, so erhält man im Ganzen nur sechs verschiedene Werthe, von denen sich wiederum je zwei nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Es sind mithin $y_1^2\, y_2^2\, y_3^2$ die drei Wurzeln einer in y^2 kubischen Gleichung u. zwar lautet dieselbe:

$$65)\quad 4y^6 - 12(B^2 - AC)y^4 + (12(B^2 - AC)^2 - A^2 g_2)y^2 - (A^2B' - 3ABC + 2B^3)^2 = 0.$$

Zwischen den Wurzeln dieser Gleichung u. den Wurzeln der Gleichung $4\xi^3 - g_2\xi - g_3 = 0$ bestehen folgende einfache Relationen:

$$66)\quad \begin{aligned} y_1^2 &= B^2 - A(C - \xi_1) \\ y_2^2 &= B^2 - A(C - \xi_2) \\ y_3^2 &= B^2 - A(C - \xi_3) \end{aligned}$$

Hieraus geht hervor, dass zu jedem der ξ zwei gleiche aber entgegengesetzte Werthe der y gehören. Hat man also die Invarianten g_2 u. g_3 berechnet, so suche man die Wurzeln der Gleichung $4\xi^3 - g_2\xi - g_3 = 0$, bestimme zu diesen die Größen y aus den Gleichungen (66) u. berechne dann die Wurzeln $x_1\, x_2 \ldots x_3\, x_4$ der gegebenen Gleichung aus den Formeln (64). Da aber für jedes y auch der entgegengesetzte Werth genommen werden kann, so würde man aus diesen Formeln acht verschiedene Werthe für die Wurzeln der Gleichung $R(x) = 0$ erhalten, was nicht möglich ist. Diese Schwierigkeit wird aber dadurch gehoben, dass zwischen den y eine Relation besteht, nämlich:

$$\eta_1 \eta_2 \eta_3 = \frac{1}{2}(A^2 B' - 3ABC + 2B^3)$$

Hat man daher für zwei der η das Zeichen willkürlich gewählt, so ist das des dritten durch vorstehende Gleichung bestimmt, u. es ergeben dann die Formeln (64) auch nur vier Werthe für die Wurzeln der Gleichung $R(x) = 0$.

Sind nun die Wurzeln $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$ sämtlich reell, so sind auch die drei η alle reell, also ihre Quadrate positiv reell. Umgekehrt wenn die Quadrate der η alle positiv u. reell sind, so sind die Größen η u. somit auch die Wurzeln $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$ reell. Sollen nun zunächst die Quadrate der η reell sein, so müssen die ξ reell sein u. dieses ist der Fall, wenn die Discriminante der kubischen Gleichung $4\xi^3 - g_2\xi - g_3 = 0$ positiv ist d.h. es muß erstens sein:

$$67)\quad 1,\quad 4g_2^3 - 27g_3^2 > 0$$

Sollen ferner die Quadrate der η positiv sein, so müssen in der Gleichung für η, dieselbe betrachtet als kubische Gleichung für η^2 sämtliche Coefficienten positiv sein, d.h. es müssen, da das constante Glied von selbst diese Bedingung erfüllt, die weiteren zwei Bedingungen erfüllt werden:

$$67)\quad \begin{array}{l} 2,\quad B^2 - AC > 0 \\ 3,\quad 12(B^2 - AC)^2 - A^2 g_2 > 0 \end{array}$$

Die Ungleichungen 67. 1, 2, 3 geben die exacten

Bedingungen für die Realität der Wurzeln $x_1 x_2 x_3 x_4$ der gegebenen Gleichung $R(x) = 0$. Ist die Discriminante (67.1) gleich 0, so sind zwei der Wurzeln ξ einander gleich, daher sind auch zwei der Größen y. u. somit zwei Wurzeln der gegebenen Gleichung einander gleich. Ist sie negativ, so sind zwei der Größen ξ conjugirt complex, die dritte reell. Wenn wir dann unter ξ_1 die reelle Wurzel verstehen, so wird y_1 ebenfalls reell sein, aber y_3 u. y_3 conjugirt complex, mithin werden auch zwei Wurzeln x_1 u. x_2 reell, die beiden andern conjugirt complex sein. Ist aber die Discriminante positiv, dagegen eine oder die beiden anderen Bedingungen nicht erfüllt, so sind sämtliche Wurzeln $x_1 x_2 x_3 x_4$ complex. Also:

I Sind alle drei Bedingungen erfüllt, so sind sämtliche Wurzeln $x_1 x_2 x_3 x_4$ reell.

II. Sind die beiden letzten Bedingungen erfüllt, die erste aber nicht, so sind zwei dieser Wurzeln reell, zwei complex.

III. Ist die erste Bedingung erfüllt, von den beiden andern aber entweder nur eine oder gar keine, so sind alle Wurzeln der gegebenen Gleichung complex.

Wir gehen nunmehr zu der bereits angefangenen Aufgabe des sphärischen Pendels zurück. Es war:

$$(68)\quad \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{z^2}{l^2}\right)(4gz+h) - \frac{k^2}{l^2} = R(z)$$

Die Coefficienten dieser Gleichung sind sämtlich reell. Ist nun für irgend einen Augenblick $t = t_0$ der zugehörige Werth von z z_0, so muss $R(z_0)$ positiv sein, da $\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$ positiv ist. Nun ist aber ferner:

$$R(+l) = - \;;\quad R(-l) = - \;,\quad R(-\infty) = +$$

Mithin besitzt die Gleichung $R(z) = 0$ drei reelle Wurzeln, welche bezüglich in den Intervallen liegen:

$$+l \ldots z_0 \;;\quad z_0 \ldots -l \;;\quad -l \ldots -\infty .$$

Bezeichnen wir dieselben mit a_1 a_2 a_3, wobei $a_1 > a_2 > a_3$ sei, so ist:

$$69)\quad \begin{cases} R(z) = \frac{4g}{l^2}(a_1 - z)(z - a_2)(z - a_3) \\ +l > a_1 > z_0 \\ z_0 > a_2 > -l \\ -l > a_3 > -\infty \end{cases}$$

Bei unserer Aufgabe muss nun z beständig zwischen den Grenzen a_1 u. a_2 liegen; denn überschritte z, während t stetig zunimmt, eine dieser beiden Grenzen, so würde $R(z)$ negativ werden, während es doch bei reellen Werthen von z positiv sein muss. Den Werth a_1 sowohl als den Werth a_2 nimmt aber z unendlich oft an. Dies kann man, ohne auf die Theorie der elliptischen Functionen zurückzugehen, wie folgt beweisen:

Es sei vorgelegt die Aufgabe, aus der Gleichung:

$$a, \quad \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = F(z) \quad ,$$

in welcher $F(z)$ eine gegebene eindeutige Function von z u. die beiden Veränderlichen z u. t nur reelle Werthe annehmen sollen, z als Function von t zu bestimmen. Soll sich dabei z als periodische, stets endlich bleibende Function von t herausstellen, so müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

1, Es verschwindet $F(z)$ für zwei reelle Werthe a, b von z.

2, Der Quotient $\frac{(a-z)(z-b)}{F(z)} = \frac{1}{F_1(z)}$ ändert sein Zeichen nicht u. wird nicht unendlich, so lange z zwischen den Grenzen a u. b liegt. In diesen Grenzen selbst besitzt $F_1(z)$ einen von 0 verschiedenen Werth.

3, Für irgend einen bestimmten Werth t_0 von t ist der zugehörige Werth z_0 von z in dem Intervalle $a \ldots b$ enthalten.

Setzt man nun:

$$b, \quad z = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos v,$$

wo v eine reelle Veränderliche sein soll, so wird, wenn v alle Werthe von 0 bis π durchläuft, z alle Werthe von a bis b u. zwar jeden nur einmal annehmen. Durch diese Substitution geht die vorgelegte Gleichung über in:

$$c, \quad \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = F_1\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos v\right) = f(\cos v)$$

Es wird somit die Gleichung (a) sicher befriedigt werden, wenn man aus der vorstehenden Gleichung v als Function von t bestimmt u. dann z aus Gleichung (b) berechnet. Soll v mit wachsendem t auch zunehmen, so ist in der Gleichung:

$$d,\qquad dt = \frac{dv}{\sqrt{f(\cos v)}}$$

der Quadratwurzel das positive Vorzeichen beizulegen. Dasselbe bleibt während der ganzen Bewegung unverändert, da für alle reellen Werthe von v zwischen $-\infty$ u. $+\infty$ z zwischen den Grenzen a u. b liegt u. daher $F_1(z)$ oder $f(\cos v)$ niemals verschwinden oder unendlich groß werden kann. Setzt man nun:

$$e,\qquad \psi(v) = \int_0 \frac{dv}{\sqrt{f(\cos v)}} = t - \tau$$

so ist $\psi(v)$ eine für jeden reellen Werth von v definirte Function, deren Ableitung nach t beständig positiv ist u. welche demnach, wenn v beständig zunehmend alle reellen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, ebenfalls stetig wachsend von $-\infty$ bis $+\infty$ übergeht. Es wird daher auch t alle reellen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen u. zwar so, dass jedem Werthe von v ein einziger Werth von t entspricht u. umgekehrt. Ferner werden unendlich kleinen Aenderungen von t auch unendlich kleine Aenderungen von v entsprechen. Es wird so-

mit durch die Gleichung (e) v als eine stetige Function von $t-\tau$ definirt, welche gleichzeitig mit t von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft. Setzt man also:

$$f, \quad v = \varphi(t-\tau)$$

u. bestimmt dann z aus der Gleichung:

$$g, \quad z = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\cos(\varphi(t-\tau)),$$

so ist hierdurch z als stetige Function von t definirt, welche der gegebenen Differentialgleichung (a) genügt. Dass dieser Ausdruck das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung unter den gemachten Voraussetzungen darstellt, lässt sich leicht dadurch zeigen, dass man nachweist, dass über die willkürliche Constante τ stets so verfügt werden kann, dass z einen vorgeschriebenen Werth u. $\frac{dz}{dt}$ ein vorgeschriebenes Vorzeichen erhält. Nehmen wir dieses als bewiesen an, so folgt aus unserer Formel (g), dass nicht nur z für alle reellen Werthe von t beständig zwischen a u. b liegt, sondern dass auch z diese Grenzen unendlich oft erreicht, nämlich erstere für $v = 2n\pi$, letztere für $v = (2n+1)\pi$, unter n eine beliebige ganze Zahl verstanden. Aus der Definitionsgleichung:

$$\psi(v) = \int_0^v \frac{dv}{\sqrt{f(\cos v)}}$$

geht nun hervor:

$$\psi(v+2\pi) = \int_0^{v+2\pi} \frac{dv}{\sqrt{f(\cos v)}}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{dv}{\sqrt{f(\cos v)}} + \int_{2\pi}^{2\pi+v} \frac{dv}{\sqrt{f(\cos v)}}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{dv}{\sqrt{f(\cos v)}} + \int_0^{v} \frac{dv}{\sqrt{f(\cos v)}}$$

Setzt man also:

$$h)\quad \omega = \int_0^{\pi} \frac{dv}{\sqrt{f(\cos v)}}$$

so wird:

$$\Psi(v+2\pi) = \Psi(v) + 2\omega \qquad \text{oder}$$

$$\Psi(v+2\pi) = t - \tau + 2\omega$$

$$i)\quad v + 2\pi = \varphi(t - \tau + 2\omega)$$

Aendert sich also t um die constante Größe 2ω, so ändert sich v um 2π. Mithin ist z eine periodische Function von t, da sie ihren Werth nicht ändert, wenn man t um ein beliebiges Vielfache von 2ω vermehrt, u. zwar wird z den Werth a annehmen, wenn $t = \tau + 2\nu\omega$ u. den Werth b, wenn $t = \tau + (2\nu+1)\omega$ ist. Hiermit ist die pag. ausgesprochne Behauptung bewiesen.

Da nun in unserer Aufgabe die drei Bedingungen pag. erfüllt sind, so folgt unmittelbar, dass durch die Differentialgleichung (68) z als eine periodische Function von t definirt wird. Um nun diese Function selbst aufzustellen, transformiren wir die gegebene Gleichung:

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = R(z) = \frac{4g}{l^2}(a_1 - z)(z - a_2)(z - a_3)$$

in die folgende:

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}$$

mittelst der Substitution:

$$70)\quad s = \frac{1}{4}\,\frac{R'(a_2)}{z - a_2} + \frac{1}{24}\,R''(a_2)$$

Bezeichnen wir nunmehr mit t_0 denjenigen Werth von t, für welchen $z = a_2$, also $s = \infty$ wird, so wird

$$s = \wp(t - t_0)$$

71) $$\frac{ds}{dt} = \wp'(t-t_0) = -\frac{1}{4}\,\frac{R'(a_2)}{(z-a_2)^2}\,\frac{dz}{dt}$$

Setzt man hierin $z = a_1$, so wird $\frac{dz}{dt} = 0$, also auch $\wp'(t-t_0) = 0$; d.h. es ist für $z = a_1$ $\wp(t-t_0)$ gleich einer der Größen e. In gleicher Weise verschwindet $\wp'(t-t_0)$, wenn man $z = a_3$ oder $z = \infty$ setzt.

Mithin erhalten wir:

$$e' = \frac{1}{4}\,\frac{R'(a_2)}{a_1 - a_2} + \frac{1}{24} R''(a_2)$$

72) $$e''' = \frac{1}{4}\,\frac{R'(a_2)}{a_3 - a_2} + \frac{1}{24} R''(a_2)$$

$$e'' = \frac{1}{24} R''(a_2)$$

Was die Reihenfolge der e anlangt, so ist, da $\frac{R'(a_2)}{a_1 - a_2}$ positiv, $\frac{R'(a_2)}{a_3 - a_2}$ negativ ist, $e' > e'' > e'''$, mithin:

$$e' = e_1\,, \quad e'' = e_2\,, \quad e''' = e_3$$

Folglich:

$$e_1 - e_2 = \frac{1}{4}\,\frac{R'(a_2)}{a_1 - a_2} = \frac{g}{l^2}(a_2 - a_3)$$

73) $$e_2 - e_3 = -\frac{1}{4}\,\frac{R'(a_2)}{a_3 - a_2} = \frac{g}{l^2}(a_1 - a_2)$$

$$e_1 - e_3 = (e_1 - e_2) + (e_2 - e_3) = \frac{g}{l^2}(a_1 - a_3)$$

Nun ist: $\wp u - e_1 = \frac{\sigma_1^2 u}{\sigma^2 u}$, mithin:

$$\frac{\sigma_1^2(t-t_0)}{\sigma^2(t-t_0)} = \wp(t-t_0) - e_1 = \frac{1}{4} R'(a_2)\,\frac{a_1 - z}{(z-a_2)(a_1-a_2)}$$

$$\frac{\sigma_2^2(t-t_0)}{\sigma^2(t-t_0)} = \wp(t-t_0) - e_2 = \frac{1}{4} R'(a_2)\,\frac{1}{z-a_2}$$

$$\frac{\sigma_3^2(t-t_0)}{\sigma^2(t-t_0)} = \wp(t-t_0) - e_3 = \frac{1}{4} R'(a_2)\,\frac{a_3 - z}{(z-a_2)(a_3-a_2)}$$

u. hieraus ergibt sich nun:

$$z - a_2 = \frac{1}{4} R'(a_2) \frac{\sigma^2(t-t_0)}{\sigma_2^2(t-t_0)}$$

$$74) \quad \frac{a_1 - z}{a_1 - a_2} = \frac{\sigma_1^2(t-t_0)}{\sigma_2^2(t-t_0)}$$

$$\frac{z - a_3}{a_2 - a_3} = \frac{\sigma_3^2(t-t_0)}{\sigma_2^2(t-t_0)}$$

Hiermit ist nun z vollkommen bestimmt, doch werden wir weiter unten noch andre Formeln zur Berechnung von z angeben. Wir bemerken hier noch, dass z nur dann gleich ∞ werden kann, wenn $\sigma_2(t-t_0) = 0$ d.h. wenn $t \equiv t_0 + \omega_2$ ist; da aber t nur reelle Werthe annimmt, so erkennt man, dass während der ganzen Bewegung z stets endlich bleibt. Zugleich sieht man, dass z den Werth a_1 für $t \equiv t_0 + \omega_1$ den Werth a_2 für $t \equiv t_0$ annimmt, dass aber z niemals den Werth a_3 annehmen kann, da t stets reell bleiben soll.

Um nun auch $x + yi$ als elliptische Funktion von t auszudrücken, haben wir zunächst die Gleichg:

$$d\log(x+yi) = \frac{-z\,dz + ik\,dt}{l^2 - z^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{dz + \frac{ik}{l}dt}{z+l} + \frac{dz - \frac{ik}{l}dt}{z-l}\right)$$

auf eine integrable Form zu bringen. Dabei setzen wir zur Abkürzung $t - t_0 = u$. Setzen wir ferner $z = \varphi(u)$, so können wir vorstehende Gleichung auch so schreiben:

$$75) \quad \frac{d\log(x+yi)}{dt} = \frac{1}{2}\frac{\varphi'(u) + \frac{ik}{l}}{\varphi(u)+l} + \frac{1}{2}\frac{\varphi'(u) - \frac{ki}{l}}{\varphi(u)-l}$$

Die rechte Seite ist eine elliptische Function, dieselbe wird unendlich nur für:

$$76)\quad \begin{aligned} &\varphi(u) = +l \quad , \quad \varphi'(u) = -\frac{ik}{l} \\ &\varphi(u) = -l \quad , \quad \varphi'(u) = +\frac{ik}{l} \\ &\varphi(u) = \infty \quad \text{d.h. für} \quad u \equiv \omega_2 \end{aligned}$$

Da nun für $z = \pm l$ $\frac{dz}{dt} = \pm \frac{ik}{l}$ ist, wie aus Gleichung (68) hervorgeht, so kann man zwei Argumente $u = v_1$ u. $u = v_2$ finden, welche die Gleichungen (76) wirklich erfüllen u. zwar findet man dieselben nach den Formeln (71) durch folgende Gleichungen:

$$77)\quad \begin{aligned} &p v_1 = e_2 + \frac{1}{4}\frac{R'(a_2)}{l - a_2} \quad ; \quad p' v_1 = \frac{i}{4}\frac{R'(a_2)}{(l-a_2)^2}\frac{k}{l} \\ &p v_2 = e_2 - \frac{1}{4}\frac{R'(a_2)}{l + a_2} \quad ; \quad p' v_2 = \frac{i}{4}\frac{R'(a_2)}{(l+a_2)^2}\frac{k}{l}. \end{aligned}$$

Um die Beschaffenheit von v_1 u. v_2 etwas näher zu untersuchen, bemerken wir die folgenden Ungleichungen:

$$e_1 > p v_1 > e_2$$
$$e_3 > p v_2 > -\infty$$

Beachtet man ferner die Tabelle:

u	pu	$p'u$
$0 \dots \omega$	$+\infty \dots e_1$	$-$
$\omega \dots \omega + \omega'$	$e_1 \dots e_2$	$+i$
$\omega + \omega' \dots \omega'$	$e_2 \dots e_3$	$+$
$\omega' \dots 0$	$e_3 \dots -\infty$	$-i$

so sieht man, dass v_1 in dem Intervalle $\omega \dots \omega + \omega'$, v_2 in dem Intervalle $\omega' \dots 0$ gelegen ist, falls man die

Constante k als positiv annimmt, oder es kann gesetzt werden:

$$78) \quad \begin{aligned} v_1 &= \omega + w_1 i \\ v_2 &= w_2 i \end{aligned}$$

worin w_1 u. w_2 reelle Größen sind, die beide zwischen 0 u. $\frac{\omega'}{i}$ liegen. – Nunmehr lautet die Gleichung (75)

$$\frac{d\log(x+yi)}{dt} = \frac{1}{2}\,\frac{\varphi'(u)+\varphi'(w_2 i)}{\varphi(u)-\varphi(w_2 i)} + \frac{1}{2}\,\frac{\varphi'(u)+\varphi'(\omega+w_1 i)}{\varphi(u)-\varphi(\omega+w_1 i)}$$

Wendet man hierauf die Formel (28) an, wobei zu beachten, dass in unserem Falle $A=0$ u. $u_1=\omega_2$ ist, so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{d\log(x+yi)}{dt} &= \frac{\sigma'(u-w_2 i)}{\sigma(u-w_2 i)} - \frac{\sigma'(u-\omega_2)}{\sigma(u-\omega_2)} + \frac{\sigma'(w_2 i-\omega_2)}{\sigma(w_2 i-\omega_2)} \\ &+ \frac{\sigma'(u-\omega-w_1 i)}{\sigma(u-\omega-w_1 i)} - \frac{\sigma'(u-\omega_2)}{\sigma(u-\omega_2)} + \frac{\sigma'(\omega+w_1 i-\omega_2)}{\sigma(\omega+w_1 i-\omega_2)} \end{aligned}$$

oder mit Rücksicht auf die Formel:

$$\frac{\sigma'(u-\omega_\lambda)}{\sigma(u-\omega_\lambda)} = \frac{\sigma_\lambda' u}{\sigma_\lambda u} - \eta_\lambda$$

$$79) \quad \frac{d\log(x+yi)}{dt} = \frac{\sigma'(u-w_2 i)}{\sigma(u-w_2 i)} + \frac{\sigma_1'(u-w_1 i)}{\sigma_1(u-w_1 i)} - 2\,\frac{\sigma_2' u}{\sigma_2 u} + \frac{\sigma_2'(w_2 i)}{\sigma_2(w_2 i)} + \frac{\sigma_3'(w_1 i)}{\sigma_3(w_1 i)}$$

In dieser Form (79) nun haben wir eine unmittelbar integrable Gleichung erhalten. Bezeichnen wir daher mit $x_0+y_0 i$ den Werth von $x+yi$ für $t=t_0$, also für $u=0$, so wird:

$$80) \quad \frac{x+yi}{x_0+y_0 i} = -\,\frac{\sigma_1(u-w_1 i)\,\sigma(u-w_2 i)}{\sigma_1(w_1 i)\,\sigma(w_2 i)\,\sigma_2^2 u}\; e^{u\left(\frac{\sigma_3'(w_1 i)}{\sigma_3(w_1 i)} + \frac{\sigma_2'(w_2 i)}{\sigma_2(w_2 i)}\right)}$$

Hiermit ist im Grunde genommen unsere Aufgabe gelöst, indem wir z u. $x+yi$ als Functionen von t

dargestellt haben.

Man hat daher, um die Aufgabe zu lösen, zunächst die drei Wurzeln der Gleichung $R(z)=0$ aufzusuchen, sodann aus (72) die Größen $e_1\, e_2\, e_3$ zu berechnen, aus diesen dann die Functionen $\wp$ u. σ zu bilden u. endlich zwei Argumente $v_1\; v_2$ oder $w_1 i+\omega$ u. $w_2 i$ zu bestimmen, welche die Gleichungen (77) befriedigen.

Die Formel (80) formen wir noch dadurch um, daß wir ϑ-Functionen einführen. Dazu setzen wir:

$$v = \frac{t-t_0}{2\omega}\,, \qquad \tau = \frac{\omega'}{\omega}$$

$$v_1 = \frac{w_1}{2\omega}\,, \qquad v_2 = \frac{w_2}{2\omega}$$

Dann ist:

$$\sigma_\alpha u = C_\alpha\, e^{\eta \frac{u^2}{2\omega}}\, \vartheta_\alpha(v)\,, \qquad \text{also:}$$

$$\frac{\sigma_\alpha' u}{\sigma_\alpha u} = \frac{\eta u}{\omega} + \frac{1}{2\omega}\,\frac{\vartheta_\alpha'(v)}{\vartheta_\alpha(v)}$$

Hiernach wird:

$$\frac{x+yi}{x_0+y_0 i} = -\frac{1}{C_2^2}\,\frac{\vartheta_1(v-v_1 i)\,\vartheta(v-v_2 i)}{\vartheta_1(v_1 i)\cdot\vartheta(v_2 i)\cdot\vartheta_2^2(v)}\, e^{v\left(\frac{\vartheta_3'(v_1 i)}{\vartheta_3(v_1 i)}+\frac{\vartheta_2'(v_2 i)}{\vartheta_2(v_2 i)}\right)}.$$

oder da $\frac{1}{C_\alpha} = \vartheta_2(0)$ ist:

$$81)\qquad \frac{x+yi}{x_0+y_0 i} = -\frac{\vartheta_2^2(0)\,\vartheta_1(v-v_1 i)\,\vartheta(v-v_2 i)}{\vartheta_1(v_1 i)\cdot\vartheta(v_2 i)\cdot\vartheta_2^2(v)}\, e^{v\left(\frac{\vartheta_3'(v_1 i)}{\vartheta_3(v_1 i)}+\frac{\vartheta_2'(v_2 i)}{\vartheta_2(v_2 i)}\right)}$$

Der erste Theil dieses Ausdrucks ist reell periodisch; ändert man nämlich t um 2ω, also v um eine Einheit, so ändert sich ϑ_2 nicht, dagegen ändern ϑ_1 u. ϑ ihr Zeichen, so dass also ihr Product ebenfalls

ungeändert bleibt. Der Exponentialfactor besitzt nun zwar diese Periode nicht, sondern eine andre; trotzdem aber ist vorstehende Formel sehr geeignet, den Verlauf der Bewegung kennen zu lernen. Man kann nämlich, da der Exponent eine rein imaginäre Größe ist, setzen:

$$82) \quad \frac{\vartheta_3'(v_1 i)}{\vartheta_3(v_1 i)} + \frac{\vartheta_2'(v_2 i)}{\vartheta_2(v_2 i)} = i m$$

Bezeichnet man dann ferner mit $\xi + \eta i$ die complexe Größe, welche entsteht, wenn man den ersten Factor rechts mit $x_0 + y_0 i$ multiplicirt, so ist:

$$x + yi = (\xi + \eta i)\, e^{imv}$$

also:

$$83) \quad \begin{aligned} x &= \xi \cos(mv) - \eta \sin(mv) \\ y &= \xi \sin(mv) + \eta \cos(mv) \end{aligned}$$

Denken wir uns nun ein neues dem bisherigen congruentes Achsensystem $\xi \eta \zeta$, welches mit dem alten die verticale Achse ($z .. \zeta$) u. den Anfangspunkt gemein hat u. nehmen wir an, dass dasselbe mit der constanten Winkelgeschwindigkeit m in der $x\, y$ Ebene rotirt, so werden die Coordinaten des Punktes $x\, y$ mit den Coordinaten $\xi\, \eta$ desselben Punktes gerade durch die Gleichungen (83) zusammenhängen. Hierin sind nun $\xi\, \eta$ allein abhängig von t u. zwar sind es periodische Functionen von t mit der Periode 2ω. Dieselbe Periode besitzt aber auch $z = \zeta$. Mithin ist die Bewegung des betrachteten Punktes eine perio-

dische mit Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, welches mit der constanten Winkelgeschwindigkeit m um die vertikale Achse des ursprünglichen Systems rotirt. Die absolute Bewegung des schwingenden Punktes im Raume ist jedoch keine periodische, wenigstens im Allgemeinen, da im Allgemeinen die Zeitpunkte, an denen ξ η u. $\cos(mv)$, $\sin(mv)$ wieder dieselben Werthe annehmen, nicht zusammenfallen. Nur in dem Ausnahmefalle, wo die beiden Perioden 2ω u. $\frac{2\pi}{m}$ in einem rationalen Verhältnisse stehen, wird der schwingende Punkt nach Verlauf eines bestimmten Zeitabschnitts auch im Raume wieder dieselbe Lage einnehmen. –

Schliesslich wollen wir noch zur Berechnung von z eine bequemere Formel ableiten, als es die Gl. (74) sind. Da nämlich $z+l$ eine elliptische Function von u ist, welche für $u = \pm w_2 i$ gleich 0 u. für $u = \pm \omega_2$ gleich ∞ wird, so ist:

$$z + l = C \frac{\sigma(u - w_2 i)\,\sigma(u + w_2 i)}{\sigma(u - \omega_2)\,\sigma(u + \omega_2)}$$

Die Constante ergibt sich einfach aus der Bemerkung, dass für $u = \omega + w_1 i$ $z = l$ wird, also:

$$2l = C \frac{\sigma(\omega + (w_1 - w_2)i)\,\sigma(\omega + (w_1 + w_2)i)}{\sigma(w_1 i - \omega')\,\sigma(w_1 i + \omega + \omega_2)}$$

folglich:

$$1+\frac{z}{l} = 2\,\frac{\sigma(w_1 i-\omega')\,\sigma(w_1 i+\omega+\omega_2)\,\sigma(u-w_2 i)\,\sigma(u+w_2 i)}{\sigma(\omega+i(w_1-w_2))\,\sigma(\omega+i(w_1+w_2))\,\sigma(u-\omega_2)\,\sigma(u+\omega_2)}$$

oder:

$$84)\quad 1+\frac{z}{l} = 2\,(e_1-e_2)\,\frac{\sigma_3^2(w_1 i)\,\sigma(u-w_2 i)\,\sigma(u+w_2 i)}{\sigma_1(i(w_1-w_2))\,\sigma_1(i(w_1+w_2))\,\sigma_2^2 u}$$

In ganz analoger Weise läßt sich eine Formel für $1-\frac{z}{l}$ ableiten; man findet:

$$85)\quad 1-\frac{z}{l} = 2\,\frac{\sigma_2^2(w_2 i)\,\sigma_1(u-w_1 i)\,\sigma_1(u+w_1 i)}{\sigma_1(i(w_1-w_2))\,\sigma_1(i(w_1+w_2))\,\sigma_2^2 u}$$

Wir bemerken hierbei, dass in den Ausdrücken für $x+yi$, $1+\frac{z}{l}$, $1-\frac{z}{l}$ sowie in den Werthen (74) von z dieselbe Function $\sigma_2 u$ im Nenner vorkommt, es rührt dies daher, dass für reelle Werthe von t resp. u z stets endlich bleiben u. zwischen a_1 u. a_2 liegen muß.

Führen wir endlich noch in die Formeln (84) (85) ϑ-Functionen ein, so wird:

$$86)\quad \begin{aligned} 1+\frac{z}{l} &= 2\,\frac{\vartheta_3^2(v_1 i)\,\vartheta(v-v_2 i)\,\vartheta(v+v_2 i)}{\vartheta_1(i(v_1-v_2))\,\vartheta_1(i(v_1+v_2))\,\vartheta_2^2(v)} \\ 1-\frac{z}{l} &= 2\,\frac{\vartheta_2^2(v_2 i)\,\vartheta_1(v-v_1 i)\,\vartheta_1(v+v_1 i)}{\vartheta_1(i(v_1-v_2))\,\vartheta_1(i(v_1+v_2))\,\vartheta_2^2 v} \end{aligned}$$

In dieser Form geschrieben ist z wegen der starken Convergenz der ϑ-Reihen zur numerischen Berechnung am bequemsten; zugleich tritt das periodische Verhalten von z unmittelbar hervor, da bei einer Vermehrung von t um 2ω d.h. von v um

eine Einheit Zähler u. Nenner dieselben bleiben.

Hiermit ist die Aufgabe des sphärischen Pendels vollständig gelöst.

Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt.

Bewegt sich ein Körper unter alleiniger Einwirkung der Schwerkraft, welche von constanter Größe u. Richtung angenommen werde, so bewegt sich sein Schwerpunkt in einer Parabel u. der Körper selbst um diesen so, als ob derselbe fest wäre. Um daher die Bewegung des Körpers zu bestimmen, hätte man nur die Rotationsbewegung desselben um seinen als fest im Raume angenommenen Schwerpunkt zu untersuchen. – Nimmt man aber als festen Punkt, um den sich der Körper drehen soll, nicht gerade den Schwerpunkt, sondern einen andern Punkt, so läßt sich die Bewegung des Körpers im Allgemeinen nur bestimmen, wenn man absieht von der Einwirkung irgend welcher Kräfte, u. nur in wenigen besonderen Fällen ist es möglich, die Bestimmung der Bewegung unter dem Einfluß der Schwerkraft durchzuführen.

Man denke sich außer einem festen Coordinatensystem xyz noch ein zweites, dem ersten congruentes u. mit dem Körper fest verbundenes, mithin bewegliches Achsensystem $x'y'z'$, welches mit

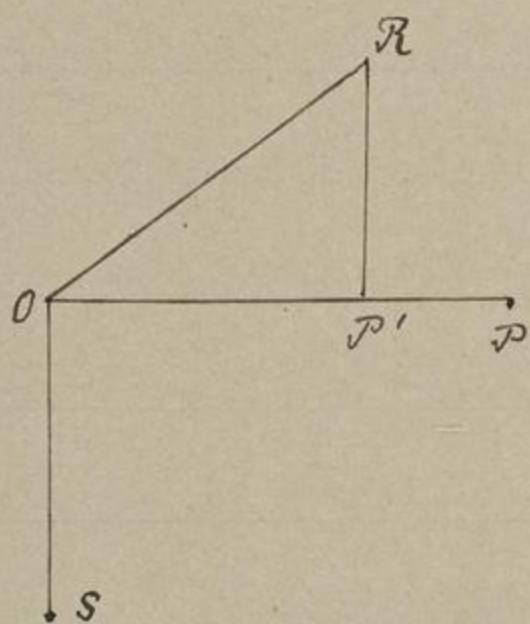
ersteren denselben Anfangspunkt hat, u. zwar werde als solcher der feste Punkt gewählt. Die Coordinaten $x'y'z'$ eines Punktes sind constante, von der Zeit nicht abhängige Größen, die Coordinaten xyz desselben Punktes aber Functionen der Zeit t. Zwischen beiden bestehen die Relationen:

$$
1) \quad \begin{aligned}
x &= \alpha x' + \alpha' y' + \alpha'' z' \\
y &= \beta x' + \beta' y' + \beta'' z' \\
z &= \gamma x' + \gamma' y' + \gamma'' z'
\end{aligned}
$$

Hierin bedeuten die 9 Größen $\alpha \beta \ldots \gamma''$ die Cosinus der Winkel, welche die positiven Richtungen der beweglichen Achsen mit denen der festen Achsen bilden. Besser noch werden sie angesehen als Coordinaten dreier in der Einheit der Entfernung auf den beweglichen Achsen gelegener Punkte $A\,B\,C$, bezogen auf das feste Achsensystem. Die Gleichungen (1) sagen daher aus, dass die Bewegung des Körpers vollständig bestimmt ist, wenn man die Bewegung dreier bestimmter Punkte kennt, also die Größen $\alpha \beta .. \gamma''$ als Functionen der Zeit dargestellt hat. Dass es sich dabei im Grunde auch nur um die Bestimmung von drei Größen handelt, folgt daraus, dass zwischen diesen 9 Größen 6 unabhängige Relationen bestehen. Anstatt aber erst diese 9 Größen durch drei von ihnen auszudrücken u.

dann diese als Functionen der Zeit darzustellen, ist es leichter, dieselben direct als Functionen von t darzustellen. Doch werden wir zunächst die zwischen den Coefficienten $\alpha\ \beta \,..\, \gamma''$ bestehenden Relationen auf eine eigenthümliche Weise ableiten.

Wir nennen Coordinaten einer Strecke die Projectionen derselben auf die Coordinatenachsen u. verstehen mit Graßmann unter dem inneren Product zweier Strecken das Product aus der einen in die Projection der andern auf sie, unter dem äußeren Product zweier Strecken das Product aus der einen in das projicirende Loth. Sind daher x, y, z, u. x', y', z', die Coordinaten zweier vom Anfangspunkte ausgehenden Strecken OP u. OR, so ist zunächst das innere Product derselben:

$$2,\quad OP . OP' = xx' + yy' + zz'$$

Graßmann stellt ferner das äußere Product $OP . P'R$ durch eine Strecke dar, welche in O auf der Ebene OPR senkrecht steht u. deren Länge sich zur Längeneinheit ebenso verhält, wie das Rechteck $OP . RP'$ zur Flächeneinheit. Dieser Begriff des äußeren Productes kommt, wenn auch unter andern Namen, schon bei Cauchy u. Poinsot vor.

Ersterer denkt sich P als einen materiellen Punkt, auf welchen eine Kraft, deren Richtung u. Größe durch die Strecke PR gegeben ist, einwirkt u. nennt die Strecke OS, welche bei Graßmann das äußere Produkt repräsentirt, das lineare Moment der Kraft PR auf den Punkt O.

Poinsot, der den Begriff der Koppelkraft einführte, nennt dieselbe Strecke OS die geometrische Characteristik der Koppelkraft. Dieselbe gibt durch ihre Richtung die Stellung der Ebene an, in welcher die Koppelkraft wirkt, u. durch ihre Länge das Produkt aus der Kraft in den Koppelarm.

Da die Projection von OS auf OP sowohl wie auf OR gleich 0 ist, so ist das innere Produkt der Strecken OS u. OP resp. OS u. OR, wenn $x''y''z''$ die Coordinaten von OS sind:

$$3) \quad \begin{aligned} xx'' + yy'' + zz'' &= 0 \\ x'x'' + y'y'' + z'z'' &= 0 \end{aligned}$$

woraus folgt:

$$\begin{aligned} x'' &= K(yz' - zy') \\ y'' &= K(zx' - xz') \\ z'' &= K(xy' - yx') \end{aligned}$$

Die Constante K bestimmt sich so: Es ist:

$$\overline{RP}'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - \frac{(xx' + yy' + zz')^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Es ist daher das äußere Produkt der beiden Strecken OP u. OR:

$$(OP.\,RP')^2 = (x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2) - (xx'+yy'+zz')^2$$
$$= \frac{x''^2+y''^2+z''^2}{k^2}$$

Da nun $OP.\,RP' = OS = (x''^2+y''^2+z''^2)^{\frac{1}{2}}$ ist, so folgt hieraus

$$k = \pm 1.$$

Das doppelte Vorzeichen von k bezieht sich offenbar darauf, dass man das Loth OS nach der einen oder der anderen Seite der Ebene ROP errichten kann. Wir setzen voraus, dass dies nach derjenigen Seite geschehen sei, für welche $k = +1$ ist. Dann ist:

$$4)\quad \begin{aligned} x'' &= yz' - zy' \\ y'' &= zx' - xz' \\ z'' &= xy' - yx' \end{aligned}$$

$$5)\quad (OP.\,RP')^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2.$$

Denkt man sich nun die Strecken OP u. OR irgendwie bewegt nur so, dass das äussere Produkt derselben ungeändert bleibt, so wird sich auch der Punkt S continuirlich bewegen u. zwar so, dass die Länge der Strecke OS sich nicht ändert. Fällt dann OP in die Richtung der positiven x Achse, OR in der xy Ebene nach der Seite der x Achse hin, nach welcher die positive y-Achse liegt, so wird die Strecke OS in die Richtung der positiven z Achse fallen. In dieser Lage ist nämlich:

$$y = 0 \qquad z = 0 \qquad x = +$$
$$z' = 0 \qquad x' = + \qquad y' = +$$

mithin nach den Formeln:

$$x'' = 0\,, \quad y'' = 0\,, \quad z'' = +$$

Es liegt mithin der Punkt S nach derjenigen Seite der xy-Ebene hin, nach welcher sich die positive z-Achse erstreckt, oder es folgen die Strecken OP, OR, OS in derselben Weise aufeinander wie die x-, y-, z-Achse.

Die Ausdrücke (5) u. (2) für das äußere u. innere Product zweier Strecken liefern uns sämtliche Relationen, welche zwischen den Coefficienten der Gleichungen (1) bestehen. Nehmen wir nämlich statt der beliebigen Punkte P u. R die auf den Achsen x' u. y' des beweglichen Coordinatensystems in der Einheit der Entfernung gelegenen Punkte A u. B, so wird der Punkt S, weil wir das bewegliche u. das feste Coordinatensystem als congruent angenommen haben, mit dem Punkte C zusammenfallen, welcher auf der z'-Achse ebenso gelegen ist, wie A u. B resp. auf der x'-, y'-Achse. Das innere Product je zweier der Strecken OA, OB, OC ist gleich 0, das äußere Product je zweier derselben ist gleich der dritten d.h. gleich 1. Da nun die Coordinaten der Strecken OA, OB, OC bezogen auf das feste Achsensystem resp. $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, $\alpha''\beta''\gamma''$ sind, so folgt aus (5):

$$6)\quad \begin{aligned} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 &= 1 \\ \alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2 &= 1 \\ \alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2 &= 1 \end{aligned} \;;$$

ferner aus (2):

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0$$
$$7) \quad \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0$$
$$\alpha''\alpha + \beta''\beta + \gamma''\gamma = 0$$

u. hieraus nach (4):

$$\alpha'' = \beta\gamma' - \gamma\beta' ; \quad \alpha = \beta'\gamma'' - \gamma'\beta'' ; \quad \alpha' = \beta''\gamma - \gamma''\beta$$
$$8) \quad \beta'' = \gamma\alpha' - \alpha\beta' ; \quad \beta = \gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'' ; \quad \beta' = \gamma''\alpha - \alpha''\beta$$
$$\gamma'' = \alpha\beta' - \beta\alpha' ; \quad \gamma = \alpha'\beta'' - \beta'\alpha'' ; \quad \gamma' = \alpha''\beta - \beta''\alpha$$

Multiplicirt man z. B. die erste Gruppe der Formeln (8) resp. mit $\alpha'', \beta'', \gamma''$, so folgt mit Rücksicht auf (6), wenn man addirt, dass die Determinante der Gleichungen (1):

$$9) \quad \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix} = 1$$

ist, welche Gleichung übrigens nichts weiter aussagt, als dass die beiden orthogonalen Coordinatensysteme, das feste u. das bewegliche, einander congruent sind. Auf Grund dieser Gleichung (9) ergibt sich durch Auflösung der Gl. (1) nach $x'y'z'$:

$$x' = \alpha x + \beta y + \gamma z$$
$$10) \quad y' = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z$$
$$z' = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z$$

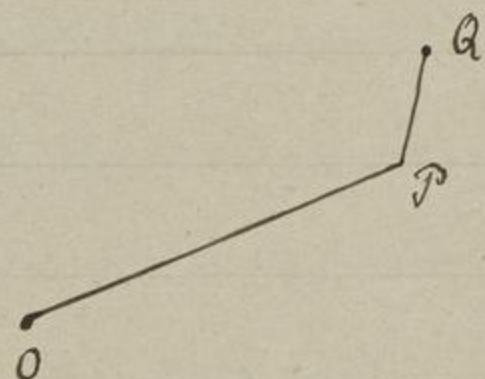
u. hieraus folgt, wenn man diese Gleichungen resp. mit $\alpha\, \alpha'\, \alpha''$ multiplicirt u. addirt u. dann dieselben mit (1) vergleicht:

$$\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1 \qquad \text{ebenso}$$
$$11) \quad \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 1$$
$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1$$

und
$$\begin{aligned} &\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = 0 \\ 12) \quad &\beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' = 0 \\ &\gamma\alpha + \gamma'\alpha' + \gamma''\alpha'' = 0 \,, \end{aligned}$$
woraus weiter hervorgehen dieselben Gleichungen (8). Damit sind sämtliche zwischen den Coefficienten der Gleichungen (1) bestehenden Relationen hergeleitet. Von denselben sind sechs, also etwa die Gleichungen (6) u. (7) von einander unabhängig, die andern also die Gl. (8) (9), (11) (12) eine einfache Folge der ersteren.

Nunmehr gehen wir über zur Transformation der gewöhnlichen für die Rotation eines Körpers um einen festen Punkt geltenden Differentialgleichungen. Diese sind:
$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = \sum m\,(yZ - zY) \\ 13) \quad &\frac{d}{dt}\sum m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) = \sum m\,(zX - xZ) \\ &\frac{d}{dt}\sum m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \sum m\,(xY - yX) \end{aligned}$$
wobei XYZ die Componenten der äusseren Kräfte bedeuten u. die Summation über sämtliche Punkte des Körpers zu erstrecken ist.

Nun folgt durch Differentiation der Gl. (1) nach der Zeit t:
$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = x'\frac{d\alpha}{dt} + y'\frac{d\alpha'}{dt} + z'\frac{d\alpha''}{dt} \\ 14) \quad &\frac{dy}{dt} = x'\frac{d\beta}{dt} + y'\frac{d\beta'}{dt} + z'\frac{d\beta''}{dt} \\ &\frac{dz}{dt} = x'\frac{d\gamma}{dt} + y'\frac{d\gamma'}{dt} + z'\frac{d\gamma''}{dt} \end{aligned}$$
Die Grössen $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ sind die Componenten der Geschwindigkeit irgend eines Punktes P zur Zeit t

parallel den festen Coordinatenachsen. Nennen wir die Componenten dieser Geschwindigkeit parallel den beweglichen Achsen bezüglich $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, so müssen, wenn man sich $\bar{x}\,dt$, $\bar{y}\,dt$, $\bar{z}\,dt$ resp. $\frac{dx}{dt}dt$, $\frac{dy}{dt}dt$, $\frac{dz}{dt}dt$ als Coordinaten der in der Zeit dt durchlaufenen Strecke PQ bezogen auf das bewegliche resp. feste Coordinatensystem vorstellt, zwischen diesen dieselben Relationen bestehen, welche wir für die Coordinaten einer u. derselben Strecke genommen in dem einen oder andern System abgeleitet haben d.h. es muss nach (10) sein:

$$15)\quad \begin{aligned} \bar{x} &= \alpha\frac{dx}{dt} + \beta\frac{dy}{dt} + \gamma\frac{dz}{dt} \\ \bar{y} &= \alpha'\frac{dx}{dt} + \beta'\frac{dy}{dt} + \gamma'\frac{dz}{dt} \\ \bar{z} &= \alpha''\frac{dx}{dt} + \beta''\frac{dy}{dt} + \gamma''\frac{dz}{dt} \end{aligned}$$

Setzt man hierin die Werthe (14) ein, berücksichtigt die aus (6) durch Differentiation nach t sich ergebenden Relationen:

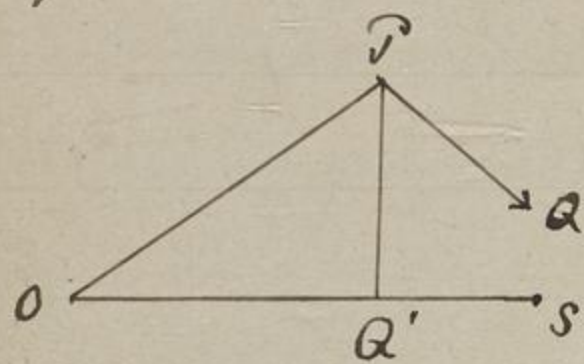
$$16)\quad \begin{aligned} \alpha\frac{d\alpha}{dt} + \beta\frac{d\beta}{dt} + \gamma\frac{d\gamma}{dt} &= 0 \\ \alpha'\frac{d\alpha'}{dt} + \beta'\frac{d\beta'}{dt} + \gamma'\frac{d\gamma'}{dt} &= 0 \\ \alpha''\frac{d\alpha''}{dt} + \beta''\frac{d\beta''}{dt} + \gamma''\frac{d\gamma''}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

u. setzt endlich mit Beachtung der Relationen (7):

$$17)\quad \begin{aligned} p &= \alpha''\frac{d\alpha'}{dt} + \beta''\frac{d\beta'}{dt} + \gamma''\frac{d\gamma'}{dt} = -\left(\alpha'\frac{d\alpha''}{dt} + \beta'\frac{d\beta''}{dt} + \gamma'\frac{d\gamma''}{dt}\right) \\ q &= \alpha\frac{d\alpha''}{dt} + \beta\frac{d\beta''}{dt} + \gamma\frac{d\gamma''}{dt} = -\left(\alpha''\frac{d\alpha}{dt} + \beta''\frac{d\beta}{dt} + \gamma''\frac{d\gamma}{dt}\right) \\ r &= \alpha'\frac{d\alpha}{dt} + \beta'\frac{d\beta}{dt} + \gamma'\frac{d\gamma}{dt} = -\left(\alpha\frac{d\alpha'}{dt} + \beta\frac{d\beta'}{dt} + \gamma\frac{d\gamma'}{dt}\right) \end{aligned}$$

erhält man folgende Gleichungen:

$$18) \quad \begin{aligned} \bar{x} &= qz' - ry' \\ \bar{y} &= rx' - pz' \\ \bar{z} &= py' - qx' \end{aligned}$$

Diese Formeln haben eine leicht anzugebende geometrische u. mechanische Bedeutung. Betrachten wir nämlich $p\,q\,r$ als Coordinaten einer Strecke S bezogen auf das bewegliche Coordinatensystem, $x'y'z'$ ebenso als Coordinaten einer Strecke OP, so stellen $\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$ bezogen auf das bewegliche Coordinatensystem nach den Formeln (4) die Coordinaten einer Strecke dar, welche auf der Ebene OPS senkrecht steht u. deren Länge, gemessen durch die Längeneinheit, gleich dem äußeren Produkt der Strecken OS u. OP d.h. gleich dem Produkt aus der Strecke OS in die Senkrechte PQ' ist, die man von P auf OS fällen kann.

Andrerseits sind $\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$ die Coordinaten von PQ d.h. die Coordinaten der Geschwindigkeit des Punktes P. Also:

$$PQ = OS \cdot PQ'.$$

Da nun OS in dem betrachteten Zeitmomente für alle Punkte des Körpers dieselbe ist, so sagt vorstehende Gleichung nichts andres aus, als dass die Geschwindigkeit eines jeden Punktes des Körpers proportional seinem Abstande von der Geraden OS ist, u. da überdies diese Geschwindigkeit senkrecht zur Ebene POS gerichtet ist,

dass die Bewegung des Körpers in dem betrachteten Zeitmoment aufgefasst werden kann als einfache Rotationsbewegung um die Achse OS. Man nennt daher auch OS die instantane Drehungsachse.

Es ist hierbei noch zu bemerken, dass die Drehung in dem Sinne erfolgt, d. h. dass PQ nach der Seite der Ebene POS zu liegt, dass OS, OP, PQ in demselben Sinne zu einander liegen, wie die positiven Richtungen der Coordinatenachsen.

Die augenblickliche Drehungsachse des Körpers kann auch definirt werden als Ort derjenigen Punkte, welche zur Zeit t die Geschwindigkeit 0 haben. Da zu diesen Punkten stets der feste Punkt O selbst gehört, so beschreibt die instantane Drehungsachse den Mantel eines Kegels. Die Strecke OS ist ferner gleich der augenblicklichen Geschwindigkeit derjenigen Punkte, welche von der augenblicklichen Drehungsachse die Entfernung 1 haben.

Löst man die Gleichungen (15) nach $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ auf, so wird:

$$
19, \quad
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \alpha\bar{x} + \alpha'\bar{y} + \alpha''\bar{z} \\
\frac{dy}{dt} &= \beta\bar{x} + \beta'\bar{y} + \beta''\bar{z} \\
\frac{dz}{dt} &= \gamma\bar{x} + \gamma'\bar{y} + \gamma''\bar{z}
\end{aligned}
$$

u. wenn man hierin die Werthe (18) substituirt:

$$
20, \quad
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= (\alpha' r - \alpha'' q)x' + (\alpha'' p - \alpha r)y' + (\alpha q - \alpha' p)z' \\
\frac{dy}{dt} &= (\beta' r - \beta'' q)x' + (\beta'' p - \beta r)y' + (\beta q - \beta' p)z' \\
\frac{dz}{dt} &= (\gamma' r - \gamma'' q)x' + (\gamma'' p - \gamma r)y' + (\gamma q - \gamma' p)z'
\end{aligned}
$$

Diese Gleichungen gelten für jeden beliebigen Punkt der Körpers, mag derselbe nun zur Masse desselben gehören oder nur fest mit ihm verbunden sein; sie gelten daher auch für die drei Punkte A B C, welche in Bezug auf das feste Achsensystem resp. die Coordinaten $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, $\alpha''\beta''\gamma''$ u. in Bezug auf das bewegliche System resp. die Coordinaten: 100, 010, 001 haben. Mithin wird:

$$21) \quad \begin{array}{lll} \frac{d\alpha}{dt} = \alpha' r - \alpha'' q , & \frac{d\alpha'}{dt} = \alpha'' p - \alpha r , & \frac{d\alpha''}{dt} = \alpha q - \alpha' p \\ \frac{d\beta}{dt} = \beta' r - \beta'' q , & \frac{d\beta'}{dt} = \beta'' p - \beta r , & \frac{d\beta''}{dt} = \beta q - \beta' p \\ \frac{d\gamma}{dt} = \gamma' r - \gamma'' q , & \frac{d\gamma'}{dt} = \gamma'' p - \gamma r , & \frac{d\gamma''}{dt} = \gamma q - \gamma' p \end{array}$$

Die 9 Größen $\alpha\beta .. \gamma''$ werden also durch lineare Differentialgleichungen aus den Größen pqr bestimmt u. es kommt somit darauf an, zuerst diese Größen pqr zu finden. Dazu führen wir die Größen pqr in die Gleichungen (13) ein. Sind $x y z$ u. $x_1 y_1 z_1$ die Coordinaten zweier vom Anfangspunkte ausgehenden Strecken bezogen auf das feste Achsensystem, so sind die Coordinaten derjenigen Strecke, welche nach Länge u. Richtung das äussere Produkt der beiden darstellt:

$$y z_1 - z y_1 \quad , \quad z x_1 - x z_1 \quad , \quad x y_1 - y x_1 .$$

Sind ebenso $x' y' z'$ u. $x_1' y_1' z_1'$ die Coordinaten derselben beiden Strecken bezogen auf das bewegliche Achsensystem, so sind die betreffenden Coordinaten der dritten Strecke:

$$y' z_1' - z_1 y_1' \quad , \quad z' x_1' - x' z_1' \quad , \quad x' y_1' - y' x_1' .$$

u. zwischen ersteren u. letzteren bestehen die Relatio-

nen für die Coordinatentransformation. Nehmen wir daher an, dass die eine Strecke nach dem beliebigen Punkte P gehe, die zweite die Geschwindigkeit dieses Punktes zur Zeit t nach Größe u. Richtung darstelle, so haben wir:

$$y'\bar{z} - z'\bar{y} = \alpha\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) + \beta\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) + \gamma\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)$$

$$22,\quad z'\bar{x} - x'\bar{z} = \alpha'\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) + \beta'\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) + \gamma'\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)$$

$$x'\bar{y} - y'\bar{x} = \alpha''\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) + \beta''\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) + \gamma''\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)$$

Multiplicirt man mit m u. summirt dann über alle Punkte des Körpers, so erhält man, wenn man noch zur Abkürzung setzt:

$$\Sigma m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = \mathcal{L}$$

$$23,\quad \Sigma m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) = \mathcal{M}$$

$$\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \mathcal{N}$$

folgende Gleichungen:

$$\alpha\mathcal{L} + \beta\mathcal{M} + \gamma\mathcal{N} = \Sigma m(y'\bar{z} - z'\bar{y})$$

$$24,\quad \alpha'\mathcal{L} + \beta'\mathcal{M} + \gamma'\mathcal{N} = \Sigma m(z'\bar{x} - x'\bar{z})$$

$$\alpha''\mathcal{L} + \beta''\mathcal{M} + \gamma''\mathcal{N} = \Sigma m(x'\bar{y} - y'\bar{x})$$

Substituirt man auf der rechten Seite die Werthe (18) u. setzt dann:

$$\Sigma m(y'^2 + z'^2) = \mathcal{A} \qquad \Sigma m\, y'z' = \mathcal{A}'$$

$$25,\quad \Sigma m(z'^2 + x'^2) = \mathcal{B} \qquad \Sigma m\, z'x' = \mathcal{B}'$$

$$\Sigma m(x'^2 + y'^2) = \mathcal{C} \qquad \Sigma m\, x'y' = \mathcal{C}'$$

so erhält man, da p q r für alle Punkte dieselben sind:

$$\alpha\mathcal{L} + \beta\mathcal{M} + \gamma\mathcal{N} = \mathcal{A}p - \mathcal{C}'q - \mathcal{B}'r$$

$$26,\quad \alpha'\mathcal{L} + \beta'\mathcal{M} + \gamma'\mathcal{N} = \mathcal{B}q - \mathcal{A}'r - \mathcal{C}'p$$

$$\alpha''\mathcal{L} + \beta''\mathcal{M} + \gamma''\mathcal{N} = \mathcal{C}r - \mathcal{B}'p - \mathcal{A}'q$$

Man bemerkt sogleich, dass diese Ausdrücke auf der rechten Seite Ableitungen einer u. derselben Function nach $p\,q\,r$ sind, nämlich der Function:

27) $T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2A'qr - 2B'rp - 2C'pq)$.

also:

28) $Ap - C'q - B'r = \frac{\partial T}{\partial p}$; $Bq - A'r - C'p = \frac{\partial T}{\partial q}$; $Cr - B'p - A'q = \frac{\partial T}{\partial r}$.

Auf Grund dieser Beziehungen gehen aus den Gleichungen (26) folgende hervor:

$$
29)\quad
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} &= \alpha\frac{dL}{dt} + \beta\frac{dM}{dt} + \gamma\frac{dN}{dt} + L\frac{d\alpha}{dt} + M\frac{d\beta}{dt} + N\frac{d\gamma}{dt}\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} &= \alpha'\frac{dL}{dt} + \beta'\frac{dM}{dt} + \gamma'\frac{dN}{dt} + L\frac{d\alpha'}{dt} + M\frac{d\beta'}{dt} + N\frac{d\gamma'}{dt}\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r} &= \alpha''\frac{dL}{dt} + \beta''\frac{dM}{dt} + \gamma''\frac{dN}{dt} + L\frac{d\alpha''}{dt} + M\frac{d\beta''}{dt} + N\frac{d\gamma''}{dt}
\end{aligned}
$$

Diese Ausdrücke lassen sich noch sehr wesentlich vereinfachen. Es ist nämlich nach (21):

$$
\begin{aligned}
L\frac{d\alpha}{dt} + M\frac{d\beta}{dt} + N\frac{d\gamma}{dt} &= L(\alpha'r - \alpha''q) + M(\beta'r - \beta''q) + N(\gamma'r - \gamma''q)\\
&= (L\alpha' + M\beta' + N\gamma')r - (L\alpha'' + M\beta'' + N\gamma'')q\\
&= r\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial r}.
\end{aligned}
$$

mithin:

$$
30)\quad
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} &= \alpha\frac{dL}{dt} + \beta\frac{dM}{dt} + \gamma\frac{dN}{dt} + r\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial r}\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} &= \alpha'\frac{dL}{dt} + \beta'\frac{dM}{dt} + \gamma'\frac{dN}{dt} + p\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial p}\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r} &= \alpha''\frac{dL}{dt} + \beta''\frac{dM}{dt} + \gamma''\frac{dN}{dt} + q\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial q}.
\end{aligned}
$$

Die Transformation der Gl. (13) wird vollständig durchgeführt sein, sobald wir noch $L\ M\ N$ auf das bewegliche Coordinatensystem transformirt haben. Es ist nach (13) u. (23):

$$
23^{a})\quad
\begin{aligned}
\frac{dL}{dt} &= \sum m(yZ - zY)\\
\frac{dM}{dt} &= \sum m(zX - xZ)\\
\frac{dN}{dt} &= \sum m(xY - yX)
\end{aligned}
$$

Nennen wir die Componenten der gesammten auf den Punkt m wirkenden Kraft parallel den Achsen des beweglichen Systems resp. $X'Y'Z'$, so gelten zwischen XYZ u. $X'Y'Z'$ dieselben Relationen, wie zwischen xyz u. $x'y'z'$, mithin ist:

$$X' = \alpha X + \beta Y + \gamma Z$$
$$Y' = \alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z$$
$$Z' = \alpha'' X + \beta'' Y + \gamma'' Z$$

Hieraus folgt:

$$(y'Z' - z'Y') = \alpha(yZ - zY) + \beta(zX - xZ) + \gamma(xY - yX)$$
$$z'X' - x'Z' = \alpha'(yZ - zY) + \beta'(zX - xZ) + \gamma'(xY - yX)$$
$$x'Y' - y'X' = \alpha''(yZ - zY) + \beta''(zX - xZ) + \gamma''(xY - yX)$$

Multiplicirt man jede dieser Gleichungen mit m u. summirt dann über alle Punkte des Körpers, so wird nach (23ª):

$$31)\quad \begin{aligned} \sum m(y'Z' - z'Y') &= \alpha\frac{dL}{dt} + \beta\frac{dM}{dt} + \gamma\frac{dN}{dt} \\ \sum m(z'X' - x'Z') &= \alpha'\frac{dL}{dt} + \beta'\frac{dM}{dt} + \gamma'\frac{dN}{dt} \\ \sum m(x'Y' - y'X') &= \alpha''\frac{dL}{dt} + \beta''\frac{dM}{dt} + \gamma''\frac{dN}{dt} \end{aligned}$$

Mithin gehen die Differentialgleichungen (13) wegen (30) über in die folgenden:

$$32)\quad \begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} - r\frac{\partial T}{\partial q} + q\frac{\partial T}{\partial r} &= \sum m(y'Z' - z'Y') \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} - p\frac{\partial T}{\partial r} + r\frac{\partial T}{\partial p} &= \sum m(z'X' - x'Z') \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial p} + p\frac{\partial T}{\partial q} &= \sum m(x'Y' - y'X'). \end{aligned}$$

Hierbei ist jedoch stillschweigend eine Voraussetzung gemacht, nämlich die, dass die auf das System einwirkenden Kräfte ausser etwa der Zeit t nur noch die Coor-

dinaten der Punkte enthalten, nicht aber abhängig sind von den Geschwindigkeiten oder gar von den Beschleunigungen. Sind nämlich $X\,Y\,Z$ als Functionen von $x\,y\,z\,t$ gegeben, so werden $X'\,Y'\,Z'$, welche aus ersteren durch Substitution der Werthe (1) hervorgehen, Functionen der 9 Größen $\alpha\beta\ldots\gamma''$ u. außerdem der Zeit t sein. Wir haben dann in den Gleichungen (21) u. (32) ein vollständiges System von 12 Differentialgleichungen zur Bestimmung der 12 Größen $\alpha\beta\gamma\ldots\gamma''\,p\,q\,r$. Die Gleichungen (32) lassen sich noch bedeutend vereinfachen, wenn wir über das mit dem Körper fest verbundene Achsensystem eine bestimmte Annahme machen. Werden nämlich die Coordinaten $p\,q\,r$ des Punktes S, bezogen auf ein neues mit dem Körper fest verbundenes Achsensystem, mit $p_1\,q_1\,r_1$ bezeichnet, so bestehen zwischen beiden Gleichungen von der Form:

$$p = \lambda p_1 + \mu q_1 + \nu r_1$$
$$q = \lambda' p_1 + \mu' q_1 + \nu' r_1$$
$$r = \lambda'' p_1 + \mu'' q_1 + \nu'' r_1$$

Führt man nun diese Werthe in den Ausdruck von T ein, welcher eine homogene Function zweiten Grades von $p\,q\,r$ ist, so geht dieselbe in eine analoge Form über:

$$T = \tfrac{1}{2}(A_1 p_1^2 + B_1 q_1^2 + C_1 r_1^2 - 2A_1' q_1 r_1 - 2B_1' r_1 p_1 - 2C_1' p_1 q_1).$$

Man kann dabei aber stets $\lambda\,\mu\,\nu\ldots\nu''$ so wählen, dass die Glieder mit den Producten zweier Coordinaten ver-

schwinden, dass also $A_1' = B_1' = C_1' = 0$ ist u. T die Gestalt erhält:

$$T = \frac{1}{2}(A_1 p_1^2 + B_1 q_1^2 + C_1 r_1^2)$$

Wir wollen daher von vornherein annehmen, dass das bewegliche Achsensystem $x'y'z'$ bereits so gewählt sei, dass $A' = B' = C'' = 0$ werden u. also T die Form hat:

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)$$

Dann wird:

$$\frac{\partial T}{\partial p} = Ap, \quad \frac{\partial T}{\partial q} = Bq, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = Cr$$

u. es gehen dadurch die Differentialgleichungen (32) in die folgenden einfacheren über:

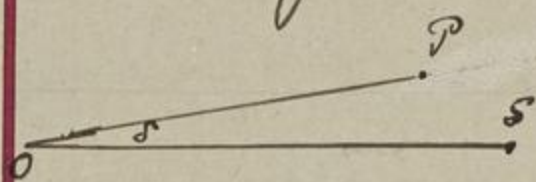
$$\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} + (C-B)qr &= \sum m(y'Z' - z'Y') \\ 33) \quad B\frac{dq}{dt} + (A-C)rp &= \sum m(z'X' - x'Z') \\ C\frac{dr}{dt} + (B-A)pq &= \sum m(x'Y' - y'X') \end{aligned}$$

An dieser Stelle dürfte es zweckmäßig sein, die mechanische & geometrische Bedeutung der Größen ABC $A'B'C'$ u. der Größe T etwas näher zu untersuchen. Es ist nämlich T die lebendige Kraft des Systems zur Zeit t. Denn es ist:

$$34) \quad \frac{1}{2}\sum m\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\} = \frac{1}{2}\sum m(\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2A'qr - 2B'rp - 2C'pq\right\} = T$$

Man kann derselben aber noch einen andern Ausdruck geben. Es ist nämlich:

[Figur: Punkte O, P, S; Strecke OS, Linie OP, Bezeichnung s]

$$T = \frac{1}{2}\sum m(\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2)$$

$$= \frac{1}{2}\sum m\left((x'^2 + y'^2 + z'^2)(p^2 + q^2 + r^2) - (x'p + y'q + z'r)^2\right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum m \left(OP^2 \cdot OS^2 - OP^2 \cdot OS^2 \cos^2 \delta \right)$$
$$= \frac{1}{2} \sum m \, OS^2 \cdot OP^2 \sin^2 \delta$$
$$= \frac{1}{2} OS^2 \cdot \sum m \, PP_1^2$$

Bezeichnet man also OS, welches gleich der augenblicklichen Rotationsgeschwindigkeit des Körpers um die Achse OS ist, mit ω, ferner den Abstand des Punktes P von dieser Achse mit r, so ist:

$$35) \quad T = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m r^2$$

Nun ist aber $\sum m r^2$ das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die augenblickliche Rotationsachse; mithin ist die lebendige Kraft des Systems gleich dem Produkt aus dem halben Quadrat der Winkelgeschwindigkeit in das Trägheitsmoment in Bezug auf die instantane Drehungsachse. In dieser Form ist der Ausdruck für die lebendige Kraft unabhängig von der Wahl des Coordinatensystems. Hiernach ist es leicht, die Bedeutung von $A \, B \, C \, .. \, C'$ anzugeben. Sind nämlich $u \, v \, w$ die Coordinaten irgend einer Strecke OQ bezogen auf das bewegliche Achsensystem u. betrachten wir die Gleichung:

$$36^a) \quad \sum m \left\{ (x'^2 + y'^2 + z'^2)(u^2 + v^2 + w^2) - (x'u + y'v + z'w)^2 \right\} = 1$$

oder:

$$36) \quad Au^2 + Bv^2 + Cw^2 - 2A'vw - 2B'wu - 2C'uv = 1$$

so stellt dieselbe eine Fläche zweiten Grades dar. Der Ausdruck auf der linken Seite besitzt aber in Bezug auf die Achse OQ dieselbe Bedeutung, wie der Ausdruck für $2T$ in Be-

zug auf die Achse OQ dieselbe Bedeutung, wie der Ausdruck für $2T$ in Bezug auf OS, d.h. es ist jener Ausdruck gleich $\xi^2 \sum m \varrho^2$, wenn ξ die Winkelgeschwindigkeit um die Achse OQ u. ϱ den Abstand eines Punktes des Körpers von derselben bezeichnet also:

$$37) \quad \xi^2 \sum m \varrho^2 = Au^2 + Bv^2 + Cw^2 - 2A'vw - 2B'wu - 2C'uv = 1.$$

Diese Fläche stellt ein Ellipsoid dar, welches den Namen „Trägheitsellipsoid führt. Hieraus folgt:

$$\sum m\varrho^2 = A\left(\frac{u}{\xi}\right)^2 + B\left(\frac{v}{\xi}\right)^2 + C\left(\frac{w}{\xi}\right)^2 - 2A'\frac{v}{\xi}\frac{w}{\xi} - 2B'\frac{w}{\xi}\frac{u}{\xi} - 2C'\frac{u}{\xi}\frac{v}{\xi} = \frac{1}{\xi}$$

Nun ist aber $\xi^2 = u^2 + v^2 + w^2$, wie aus (36^a) unmittelbar folgt d.h. es ist ξ ein Radiusvector des Centralellipsoids; folglich sagt die letzte Formel aus, dass das Trägheitsmoment des Körpers bezüglich einer beliebigen Richtung umgekehrt proportional dem Quadrat des dieser Richtung parallelen Radiusvectior des Centralellipsoids ist. Denkt man sich jetzt das mit dem Körper fest verbundene Achsensystem so gewählt, dass dasselbe mit den Achsen des Trägheitsellipsoides zusammenfällt, so ist:

$$A' = B' = C' = 0$$

und daher:

$$\sum m\varrho^2 = A\left(\frac{u}{\xi}\right)^2 + B\left(\frac{v}{\xi}\right)^2 + C\left(\frac{w}{\xi}\right)^2 = \frac{1}{\xi^2}$$

Lässt man jetzt den Punkt $u\,v\,w$ bezüglich in die Achsen des Trägheitsellipsoids rücken, so wird resp.

$$\sum m\varrho_1^2 = A \quad , \quad \sum m\varrho_2^2 = B \quad , \quad \sum m\varrho_3^2 = C.$$

d.h. die 3 Grössen $A\,B\,C$ bedeuten einmal die reciproken

Quadrate aus den Hauptachsen des Trägheitsellipsoids, andrerseits die Trägheitsmomente des Körpers bezüglich dieser Hauptachsen. Man nennt daher die Achsen des Trägheitsellipsoids die Hauptträgheitsachsen u. die Größen $A\ B\ C$ die Hauptträgheitsmomente des Körpers. Sind dieselben alle drei von einander verschieden, so gibt es nur ein einziges orthogonales Achsensytem von der Beschaffenheit, dass $A'=B'=C'=0$ ist. Die eine der Größen $A\ B\ C$ ist dann ein absolutes Minimum, eine zweite ein absolutes Maximum. Sind zwei der Größen $A\ B\ C$ einander gleich, so ist das Trägheitsellipsoid ein Rotationsellipsoid, in diesem Falle ist nur eine Hauptachse bestimmt, die andern beiden willkürlich. Ist endlich $A=B=C$, so ist das Trägheitsellipsoid eine Kugel u. das bewegliche Coordinatensystem kann willkürlich gewählt werden.

Wir gehen jetzt zu den Differentialgleichungen (33) zurück. Die allgemeine Lösung derselben bei beliebig gegebenen Kräften ist bis jetzt noch nicht gelungen; vielmehr hat man sie nur dann lösen können, wenn die auf der rechten Seite stehenden Ausdrücke gleich 0 sind, u. dies ist der Fall, wenn entweder auf das System keine Kräfte wirken, wobei der feste Punkt ein beliebiger sein kann, oder wenn auf das System eine constante Kraft also etwa die Schwerkraft wirkt u. der Angriffspunkt derselben als fester Punkt betrachtet wird. In beiden Fällen gelten also die Gleichungen:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{B-C}{A} q r$$

$$38) \quad \frac{dq}{dt} = \frac{C-A}{B} r p$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{A-B}{C} p q$$

Aus diesen sind $p\, q\, r$ als Functionen der Zeit t zu bestimmen. Hat man dies gethan, so findet man $\alpha\, \beta \ldots \gamma''$ aus den Gleichungen (21). Statt jedoch die Integration von (38) auszuführen, wollen wir möglichst einfache Gleichungen zur Bestimmung von $\gamma\, \gamma'\, \gamma''$ herleiten, da sich zeigt, dass man durch geeignete Wahl des festen Coordinatensystems bewirken kann, dass $\gamma\, \gamma'\, \gamma''$ einfach den Grössen $p\, q\, r$ proportional werden. Aus den Gleichungen (26) folgt nämlich, da bei unserer Wahl des mit dem Körper fest verbundenen Coordinatensystems $A' = B' = C' = 0$ ist:

$$\alpha L + \beta M + \gamma N = A p$$

$$39) \quad \alpha' L + \beta' M + \gamma' N = B q$$

$$\alpha'' L + \beta'' M + \gamma'' N = C r$$

Diese Gleichungen sind nun einer wesentlichen Vereinfachung fähig. Bei unserer Annahme über die auf das System wirkenden Kräfte folgt nämlich aus (31) zunächst, dass die Grössen $L\, M\, N$ Constanten sind; man kann aber ferner noch stets bewirken, dass $L = M = 0$ u. N einen positiven Werth annimmt. Es bezeichnen nämlich die Grössen $L\, M\, N$ die Componenten des Gesammtbewegungsmoments des Körpers in Bezug auf den Coordinatenanfangspunkt; da nun $L\, M\, N$ constante d.h. von der Zeit unabhängige Grössen sind, so kann man $L\, M\, N$ ansehen als Coordinaten einer Strecke, welche in Bezug auf

das feste Achsensystem eine unveränderliche Lage u. daher überhaupt eine im Raume absolut feste Richtung u. Größe hat. Führt man nun statt des ersten festen Coordinatensystems ein neues ein, welches denselben Anfangspunkt hat u. dessen positive z Achse mit jener im Raume festen Richtung zusammenfällt, so werden von den Größen $L' M' N'$, welche die Componenten jenes Gesammtbewegungsmomentes bezüglich des neuen Achsensystems sein sollen u. die somit die transformirten Ausdrücke bezüglich von $L M N$ sind, zwei, nämlich L' u. M' verschwinden, u. die dritte N' wird einen positiven Werth besitzen, der mit h bezeichnet werden möge. Nehmen wir daher an, dass das feste Achsensystem von vornherein so gewählt worden sei, dass $L = M = 0$ u. $N = h$ ist, so ergeben sich aus den Gleichungen (39) die einfachen Beziehungen:

$$40) \quad \gamma = \frac{A}{h} p \quad , \quad \gamma' = \frac{B}{h} q \quad , \quad \gamma'' = \frac{C}{h} r$$

vermöge deren die Gleichungen (38) in folgende übergehen:

$$41) \quad \begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} &= \frac{B-C}{BC} h \cdot \gamma' \gamma'' \\ \frac{d\gamma'}{dt} &= \frac{C-A}{CA} h \cdot \gamma'' \gamma \\ \frac{d\gamma''}{dt} &= \frac{A-B}{AB} h \cdot \gamma \gamma' \end{aligned} \quad ,$$

Gleichungen, welche dieselbe Form besitzen wie die Gl: (38) zur Bestimmung von $p\ q\ r$. Um dieses System von Differentialgleichungen von häufig vorkommender Gestalt gleich allgemein zu lösen, setzen wir:

$$\frac{dx_1}{dt} = -a_1 x_2 x_3$$

$$42) \quad \frac{dx_2}{dt} = -a_2 x_3 x_1$$

$$\frac{dx_3}{dt} = -a_3 x_1 x_2$$

Hierin bedeuten $a_1 a_2 a_3$ willkürliche von 0 verschiedene Constanten; wäre z. B. $a_1 = 0$, so erhielte man $x_1 = const$ u. sodann durch Elimination von x_1 aus der zweiten u. dritten Gleichung sehr einfache lineare Differentialgleichungen zur Bestimmung von x_2 u. x_3. Setzt man:

$$43) \quad s = \frac{1}{3}(a_2 a_3 x_1^2 + a_3 a_1 x_2^2 + a_1 a_2 x_3^2)$$

so wird:

$$\frac{d}{dt}(s - a_2 a_3 x_1^2) = 0$$

u. somit:

$$s - a_2 a_3 x_1^2 = e' \qquad \text{Analog}$$

$$44) \quad s - a_3 a_1 x_2^2 = e''$$

$$s - a_1 a_2 x_3^2 = e'''.$$

wobei $e' e'' e'''$ constante Größen sind, welche bestimmt sein werden, sobald für irgend einen Zeitpunkt die Werthe von $x_1 x_2 x_3$ gegeben sind. Nun ist aus (43) u. (42)

$$\frac{ds}{dt} = -2 a_1 a_2 a_3 x_1 x_2 x_3$$

mithin:

$$45) \quad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 4(s-e')(s-e'')(s-e''')$$

Hierbei ist ferner zu bemerken, dass aus (44) folgt:

$$46) \quad e' + e'' + e''' = 0$$

Somit geht aus (45) die Gleichung hervor:

$$47) \quad s = \wp(t - t')$$

wo $\wp$ die zu den drei Größen e gehörige elliptische Function

u. t' eine willkürliche Constante bedeutet, welche bestimmt ist bis auf eine Periode, wenn die Werthe von $x_1\ x_2\ x_3$ zu irgend einer Zeit t_0 bekannt sind, denn dann ist:

$$p(t_0 - t') = s_0$$

$$p'(t_0 - t') = -2\,a_1 a_2 a_3\, x_1^0 x_2^0 x_3^0$$

Damit ist aber $t_0 - t'$ u. somit t' vollständig bestimmt. Man findet nun hiernach leicht $x_1\ x_2\ x_3$ selbst, denn es ist:

$$48)\qquad a_2 a_3 x_1^2 = s - e' = \frac{\sigma_\lambda^2(t-t')}{\sigma^2(t-t')}$$

Dabei ist zu bemerken, dass es im Falle, dass die drei Grössen $a_1\ a_2\ a_3$ complex sind, vollständig gleichgiltig ist, wie man die Reihenfolge der Grössen e festsetzt; sind aber wie im vorliegenden Falle die Grössen a reell, so werden auch $e'\,e''\,e'''$ reell sein u. es wird unter ihnen eine grösste, eine kleinste u. eine mittlere geben; durch die Reihenfolge derselben sind dann die Indices $\lambda\,\mu\,\nu$ bestimmt. Aus (48) ergibt sich:

$$49)\qquad \begin{aligned} x_1 &= \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{a_2}\sqrt{a_3}}\;\frac{\sigma_\lambda(t-t')}{\sigma(t-t')} \\ x_2 &= \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{a_3}\sqrt{a_1}}\;\frac{\sigma_\mu(t-t')}{\sigma(t-t')} \\ x_3 &= \frac{\varepsilon_3}{\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}}\;\frac{\sigma_\nu(t-t')}{\sigma(t-t')} \end{aligned}$$

Hierin bedeuten die $\varepsilon \pm 1$; jedoch sind sie nicht unabhängig von einander, man kann sie indessen sämtlich gleich $+1$ setzen, wenn man die Werthe von $\sqrt{a_1}\ \sqrt{a_2}\ \sqrt{a_3}$ willkürlich lässt. Es ist nämlich:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{a_3}\sqrt{a_2}}\;\frac{d}{dt}\left(\frac{\sigma_\lambda}{\sigma}\right) = -\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{a_2}\sqrt{a_3}}\;\frac{\sigma_\mu\sigma_\nu}{\sigma^2}$$

wie aus Ellipt. Funct: pag. hervorgeht; mithin:

$$\frac{dx_1}{dt} = - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2 \varepsilon_3} a_1 x_2 x_3$$

u. daher, wenn man dies mit (42) vergleicht:

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2 \varepsilon_3} = 1 \quad , \quad \text{also da} \quad \varepsilon_1^2 = +1 \text{ ist:}$$

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = 1.$$

Mithin sind entweder sämtliche ε positiv, oder aber es sind zwei negativ, das dritte positiv. Fixirt man nun eine der mit $\frac{\sigma_3}{\sigma}$ (oder $\frac{\sigma_1}{\sigma}$) multiplicirten Wurzeln willkürlich, so kann man die andre so wählen, dass das im Zähler stehende ε positiv ist. Hiernach kann man ferner in dem Ausdruck mit $\frac{\sigma_1}{\sigma}$ (oder $\frac{\sigma_3}{\sigma}$) die dritte Wurzel so fixiren, dass das im Zähler vorkommende ε ebenfalls positiv ist. Dann ist wegen vorstehender Relation das dritte ε vollständig bestimmt. Da man nun aber durch Vermehrung der willkürlichen Constanten t' um $2\omega'$ resp. 2ω stets bewirken kann, dass $\frac{\sigma_1}{\sigma}$ resp. $\frac{\sigma_3}{\sigma}$ das entgegengesetzte Zeichen annimmt, so folgt hieraus unmittelbar, dass sämtliche ε gleich $+1$ u. die Wurzeln aus den Größen a vollständig willkürlich gewählt werden können. Daher ist die allgemeine Auflösung der Gleichungen (42):

$$50) \quad \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{a_2}\sqrt{a_3}} \frac{\sigma_\lambda(t-t')}{\sigma(t-t')} \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{a_3}\sqrt{a_1}} \frac{\sigma_\mu(t-t')}{\sigma(t-t')} \\ x_3 &= \frac{1}{\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}} \frac{\sigma_\nu(t-t')}{\sigma(t-t')} \end{aligned} \quad ,$$

wobei die Wurzelgrößen beliebig fixirt werden können.

In unserer Aufgabe ist nun:

$$51) \quad \alpha_1 = \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right)h, \quad \alpha_2 = \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)h, \quad \alpha_3 = \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)h$$

Mithin wird, wenn wir statt der σ-Quotienten die Function p einführen:

$$\gamma^2 = \frac{A^2BC}{(A-C)(B-A)h^2}\left(p(t-t') - e_\lambda\right)$$

$$52) \quad \gamma'^2 = \frac{AB^2C}{(B-A)(C-B)h^2}\left(p(t-t') - e_\mu\right)$$

$$\gamma''^2 = \frac{ABC^2}{(C-B)(A-C)h^2}\left(p(t-t') - e_\nu\right)$$

Es handelt sich jetzt darum zu entscheiden, welche der Größen $\lambda\,\mu\,\nu$ resp. den Werth 1 2 3 annimmt. Die Constanten $e_\lambda\; e_\mu\; e_\nu$ wurden bestimmt durch folgende Gleichungen, $p(t-t') = s$ gesetzt:

$$53) \quad s - \alpha_2\alpha_3\gamma^2 = e_\lambda, \quad s - \alpha_3\alpha_1\gamma'^2 = e_\mu, \quad s - \alpha_1\alpha_2\gamma''^2 = e_\nu.$$

oder:

$$s - \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)h^2\gamma^2 = e_\lambda$$

$$s - \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right)h^2\gamma'^2 = e_\mu$$

$$s - \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right)\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)h^2\gamma''^2 = e_\nu$$

Die drei Größen $A\,B\,C$, welche die Trägheitsmomente des Körpers bezüglich der drei Hauptachsen des Trägheitsellipsoides darstellen, haben im Allgemeinen von einander verschiedene Werthe. Die besonderen Fälle, in denen dieses nicht eintritt, können durch einfache Grenzübergänge aus dem allgemeinen abgeleitet werden u. sollen später zur Behandlung kommen. Setzen wir dann fest, dass B die mittlere der drei Größen $A\,B\,C$ sei; so werden in jedem Falle die Constanten α_1 u. α_3 dasselbe Zeichen α_2 dagegen stets das diesem entgegengesetzte

Zeichen haben, so dass die Producte $a_1 a_2$ u. $a_3 a_2$ beide negativ, dagegen $a_1 a_3$ positiv ist. Hieraus folgt, dass $s > e_\mu$, dagegen $s < e_\lambda$ u. $s < e_\nu$ ist, so dass also jedenfalls e_μ die kleinste der drei Größen e, also $e_\mu = e_3$ ist. Die Entscheidung aber, ob $e_\lambda > e_\nu$ oder $e_\lambda < e_\nu$ ist, ist nicht so einfach; dazu drücken wir vielmehr die Größen e durch zwei andre Constanten aus. Aus den Gleichungen (41) folgt nämlich, wenn man sie bezüglich mit $\frac{\gamma}{A}, \frac{\gamma'}{B}, \frac{\gamma''}{C}$ multiplicirt u. addirt:

$$\frac{\gamma d\gamma}{A} + \frac{\gamma' d\gamma'}{B} + \frac{\gamma'' d\gamma''}{C} = 0 \qquad \text{d. i.}$$

$$54) \qquad \frac{\gamma^2}{A} + \frac{\gamma'^2}{B} + \frac{\gamma''^2}{C} = \frac{1}{D}.$$

Hierin bedeutet D eine willkürliche Constante. Dieselbe ist zunächst positiv u. liegt ferner zwischen dem größten u. kleinsten Werthe der drei Größen $A B C$. Denn ist z. B. $A > C$, so ist:

$$\frac{1}{D} > \frac{\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2}{A}, \quad \text{also} \quad \frac{1}{D} > \frac{1}{A} \quad \text{d.h.} \quad D < A$$

$$\frac{1}{D} < \frac{\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2}{C}, \quad \text{also} \quad \frac{1}{D} < \frac{1}{C} \quad \text{d.h.} \quad D > C$$

Analoges gilt, wenn $A < C$ ist; mithin ligt D stets zwischen A u. C. Aus den Gleichungen (53) folgt ferner:

$$55) \qquad \begin{aligned} a_3 (a_1 \gamma'^2 - a_2 \gamma^2) &= e_\lambda - e_\mu \\ a_1 (a_2 \gamma''^2 - a_3 \gamma'^2) &= e_\mu - e_\nu \\ a_2 (a_3 \gamma^2 - a_1 \gamma''^2) &= e_\nu - e_\lambda \end{aligned}$$

u. aus (54), wenn man $\gamma''^2 = 1 - \gamma^2 - \gamma'^2$ setzt u. (51) beachtet:

$$56) \qquad \begin{aligned} a_1 \gamma'^2 - a_2 \gamma^2 &= \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{C}\right) h \quad , \text{ analog} \\ a_2 \gamma''^2 - a_3 \gamma'^2 &= \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{A}\right) h \\ a_3 \gamma^2 - a_1 \gamma''^2 &= \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{B}\right) h \end{aligned}$$

dividirt man daher die entsprechenden der Gleich. (55) u. (56) durcheinander, so wird:

$$e_\lambda - e_\mu = \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{C}\right)h^2 = \frac{(B-A)(C-D)}{ABCD}\,h^2$$

$$57,\quad e_\mu - e_\nu = \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right)\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{A}\right)h^2 = \frac{(C-B)(A-D)}{ABCD}\,h^2$$

$$e_\nu - e_\lambda = \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{B}\right)h^2 = \frac{(A-C)(B-D)}{ABCD}\,h^2$$

Dabei ist h aus dem gegebenen Anfangszustande des Systems nach der Formel zu bestimmen:

$$58,\quad A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = h^2$$

welche aus den Gleichungen (40) einfach dadurch hervorgeht, dass man dieselben quadrirt u. addirt. In Bezug auf die gegenseitige Lage von $A\,B\,C\,D$, dieselben zunächst als verschieden vorausgesetzt, können nun überhaupt nur folgende vier Fälle eintreten:

1, $A > B > D > C$ 2, $A > D > B > C$

3, $C > B > D > A$ 4, $C > D > B > A$.

Aus den Formeln (57) folgt dann, dass im ersten u. vierten Falle: $e_\nu > e_\lambda > e_\mu$, im zweiten u. dritten Falle dagegen: $e_\lambda > e_\nu > e_\mu$ ist. Es folgt daher, wie oben, dass jedenfalls e_μ die kleinste der Größen e ist. Nachdem wir nun festgesetzt haben, dass zur y'-Achse diejenige Achse des beweglichen Coordinatensystems gewählt werden solle, welcher das mittlere Trägheitsmoment zugehört, können wir noch willkürlich der x' Achse entweder das größte oder das kleinste Trägheitsmoment zuordnen. Wir setzen daher fest, dass im Falle $B > D$ zur x'-Achse diejenige Achse

des Ellipsoids gewählt werden solle, zu welcher das größte, wenn dagegen $B < D$ ist, diejenige, zu welcher das kleinste Trägheitsmoment gehört. Im ersten Falle ist daher:

$$A > B > D > C \qquad \text{, im letzteren aber:}$$

$$A < B < D < C$$

Für beide Fälle aber wird:

$$e_\nu > e_\lambda > e_\mu$$

mithin ist bei dieser Annahme:

$$59) \quad e_\nu = e_1 \;, \quad e_\lambda = e_2 \;, \quad e_\mu = e_3 \,.$$

u. daher werden die Gleichungen (53):

$$s - a_2 a_3 \gamma^2 = e_2 \;, \quad s - a_3 a_1 \gamma'^2 = e_3 \;, \quad s - a_1 a_2 \gamma''^2 = e_1 \,.$$

aus denen leicht die Ungleichheit gefolgert wird:

$$e_2 > s = \wp(t - t') > e_3 \,.$$

Hieraus läßt sich auf die Beschaffenheit von t' schließen. Ist nämlich $\bar{t}$ irgend ein reeller Werth von t, so muß sein $e_2 > \wp(\bar{t} - t') > e_3$. Hierdurch ist aber $\bar{t} - t'$ bis auf das Vorzeichen u. bis auf Perioden bestimmt u. zwar liegt $\bar{t} - t'$ zwischen $\omega + \omega'$ u. ω' d.h. es ist entweder $\bar{t} - t' = \omega' + t''$, oder $t' - \bar{t} = \omega' + t''$, worin t'' eine reelle positive zwischen 0 u. ω gelegene Größe bedeutet, d.h. es ist

$$t' = t_0 \mp \omega'$$

worin t_0 ebenfalls eine reelle Größe ist. Da man aber immer zu t' eine Periode $2\omega'$ hinzufügen kann, so kann man allgemein annehmen: $t' = t_0 + \omega'$.

Dadurch wird aus (52):

$$\gamma^2 = \frac{A(C-D)}{D(A-C)(e_2-e_3)} \frac{\sigma_2^2(t-t_0-\omega')}{\sigma^2(t-t_0-\omega')}$$

$$\gamma'^2 = \frac{B(A-D)}{D(B-A)(e_3-e_1)} \frac{\sigma_3^2(t-t_0-\omega')}{\sigma^2(t-t_0-\omega')}$$

$$\gamma''^2 = \frac{C(B-D)}{D(C-B)(e_1-e_2)} \frac{\sigma_1^2(t-t_0-\omega')}{\sigma^2(t-t_0-\omega')}$$

Nun ist aber:

$$\frac{\sigma_\alpha(u-\omega')}{\sigma(u-\omega')} = -i\sqrt{e_\alpha - e_3}\,\frac{\sigma_\beta u}{\sigma_3 u} \qquad \alpha = 1\;2.$$

und

$$\frac{\sigma_3(u-\omega')}{\sigma(u-\omega')} = +\sqrt{e_2-e_3}\sqrt{e_1-e_3}\,\frac{\sigma u}{\sigma_3 u}$$

Mithin wird:

$$\gamma^2 = \frac{A(D-C)}{D(A-C)} \frac{\sigma_1^2(t-t_0)}{\sigma_3^2(t-t_0)}$$

60) $$\gamma'^2 = \frac{(A-D)(D-C)}{ACD^2} h^2 \frac{\sigma^2(t-t_0)}{\sigma_3^2(t-t_0)}$$

$$\gamma''^2 = \frac{C(A-D)}{D(A-C)} \frac{\sigma_2^2(t-t_0)}{\sigma_3^2(t-t_0)}$$

Um nun die definitiven Ausdrücke für $\gamma\gamma'\gamma''$ zu erhalten, müssen wir untersuchen, welche Werthe wir den Quadratwurzeln beizulegen haben. Es ist dies gleichbedeutend mit der Bestimmung der positiven Richtungen der Hauptträgheitsachsen. Bisher haben wir nämlich über die Richtungen der einzelnen Achsen nur im Allgemeinen verfügt, ohne eine Festsetzung über den positiven oder negativen Sinn derselben zu treffen. Diese Festsetzung wird aber gegeben durch die Forderung, dass das feste u. das bewegliche Coordinatensystem einander congruent sein sollen. Bei reellen Werthen von t kann γ'' niemals verschwinden, da nun $\alpha''\beta''\gamma''$ die Coordinaten

eines auf der z' Achse in der Entfernung 1 gelegenen Punktes sind, so heisst dies, dass die z' Achse mit der positiven z-Achse entweder beständig einen spitzen oder beständig einen stumpfen Winkel bildet, je nachdem man der Quadratwurzel das positive oder negative Zeichen beilegt. Wir wollen γ'' positiv nehmen, wenn $A > C$, dagegen negativ, wenn $A < C$ ist. Das Vorzeichen von γ können wir willkürlich wählen, da wir durch Vermehrung von t_0 um 2ω stets bewirken können, dass die Quadratwurzel aus der Constanten ihr Zeichen wechselt. Wir geben daher γ das negative Vorzeichen. Dadurch ist aber das Vorzeichen von γ' bestimmt, wie einerseits aus den allgemeinen Bemerkungen pag. 93. 94. hervorgeht, was aber auch einfach in folgender Weise gezeigt werden kann. Es seien in den Ausdrücken:

$$\gamma = -\sqrt{\frac{A(D-C)}{D(A-C)}}\;\frac{\sigma_1}{\sigma_3}$$

$$\gamma' = \frac{\varepsilon h}{D}\sqrt{\frac{(A-D)(D-C)}{AC}}\;\frac{\sigma}{\sigma_3}$$

$$\gamma'' = \varepsilon'\sqrt{\frac{C(A-D)}{D(A-C)}}\;\frac{\sigma_2}{\sigma_3}$$

die Quadratwurzeln positiv, dagegen $\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon' = \pm 1$. Dann ist wegen: $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\sigma}{\sigma_3} = \dfrac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_3^2}$:

$$\frac{d\gamma'}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\,h\sqrt{\frac{(A-D)(D-C)}{ACD^2}}\sqrt{\frac{D(A-C)}{A(D-C)}}\sqrt{\frac{D(A-C)}{C(A-D)}}\;\gamma\gamma''$$

$$= -\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\,h\sqrt{\frac{(A-C)^2}{A^2C^2}}\;\gamma\gamma''$$

Da diese Wurzel positiv sein soll, so ist ihr Werth, im Falle $A > C$: $\dfrac{A-C}{AC} = \dfrac{1}{C} - \dfrac{1}{A}$; dagegen im Falle $A < C$:

$\frac{C-A}{AC} = \frac{1}{A} - \frac{1}{C}$. Nun ist aber nach (41) in jedem Falle:

$$\frac{d\gamma'}{dt} = \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C}\right) h \gamma \gamma''$$

Folglich ist:

wenn $A > C$: $\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = 1$.

" $A < C$: $\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = -1$.

Da nun aber vorausgesetzt worden war, dass $\varepsilon' = +1$ oder $= -1$ sein sollte, je nachdem $A > C$ oder $A < C$ ist, so folgt hieraus, dass für jeden Fall $\varepsilon = +1$ ist. Mithin erhalten wir:

$$61) \quad \begin{aligned} \gamma &= -\sqrt{\frac{A(D-C)}{D(A-C)}} \; \frac{\sigma_1(t-t_0)}{\sigma_3(t-t_0)} \\ \gamma' &= h\sqrt{\frac{(A-D)(D-C)}{ACD^2}} \; \frac{\sigma(t-t_0)}{\sigma_3(t-t_0)} \\ \gamma'' &= \pm\sqrt{\frac{C(A-D)}{D(A-C)}} \; \frac{\sigma_2(t-t_0)}{\sigma_3(t-t_0)} \end{aligned}$$

Hierin ist den Wurzelgrößen ihr positiver Werth beizulegen u. in der letzten Gleichung das positive oder negative Vorzeichen zu nehmen, je nachdem $A > C$ oder $A < C$ ist. Damit sind die Größen $\gamma \gamma' \gamma''$ u. damit die positiven Richtungen der Hauptträgheitsachsen bestimmt.

Wir gehen jetzt zur Berechnung von $\alpha \beta \alpha' \beta' \alpha'' \beta''$. Es ist:

$$62) \quad d\log(\alpha + \beta i) = \frac{\alpha d\alpha + \beta d\beta}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{\alpha d\beta - \beta d\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} i$$

Nun ist aber:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha' r - \alpha'' q$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \beta' r - \beta'' q$$

mithin:

$$\alpha \frac{d\beta}{dt} - \beta \frac{d\alpha}{dt} = (\alpha\beta' - \beta\alpha') r + (\beta\alpha'' - \alpha\beta'') q$$
$$= \gamma'' r + \gamma' q$$

oder da nach (40): $r = \frac{h}{C}\gamma''$, $q = \frac{h}{B}\gamma'$ ist:

$$\alpha \frac{d\beta}{dt} - \beta \frac{d\alpha}{dt} = h\left(\frac{\gamma'^2}{B} + \frac{\gamma''^2}{C}\right), \text{ also nach (54):}$$
$$= h\left(\frac{1}{D} - \frac{\gamma^2}{A}\right)$$
$$= h\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{A} + \frac{1-\gamma^2}{A}\right)$$

Folglich geht Gl. (62) über in:

$$\frac{d\log(\alpha+\beta i)}{dt} = -\frac{\gamma\frac{d\gamma}{dt}}{1-\gamma^2} + ih\frac{\frac{1}{D} - \frac{1}{A} + \frac{1-\gamma^2}{A}}{1-\gamma^2}$$

63) $$= \frac{ih}{A} + \frac{\gamma\frac{d\gamma}{dt} + ih\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{D}\right)}{\gamma^2 - 1}$$

Den zweiten Ausdruck der rechten Seite bringen wir jetzt auf die Form: $\frac{1}{2}\frac{\varphi'(t)+\varphi'(t_1)}{\varphi(t)-\varphi(t_1)}$. Setzen wir dann:

64) $$\gamma^2 = \frac{A(D-C)}{D(A-C)}\frac{\sigma_1^2(t-t_0)}{\sigma_3^2(t-t_0)} = \varphi(t)$$

so haben wir ein Argument t_1 zu bestimmen, für welches

$$\varphi(t) = 1 \quad \text{und} \quad \varphi'(t) = 2ih\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{D}\right)$$

ist. Dies ist in der That möglich. Es folgt nämlich aus (64)

$$\varphi'(t) = 2\gamma\frac{d\gamma}{dt} = 2\frac{B-C}{BC}h\gamma\gamma'\gamma''$$

also für $t = t_1$, für welchen Werth $\gamma^2 = 1$ ist:

65) $$\varphi'^2(t_1) = 4\left(\frac{B-C}{BC}\right)^2 h^2\gamma'^2\gamma''^2.$$

Nun ist aber ferner, wie aus den Gleichungen u. (54) folgt: für $t = t_1$: $\gamma'^2 + \gamma''^2 = 0$ und:

$$\frac{\gamma'^2}{B} + \frac{\gamma''^2}{C} = \frac{1}{D} - \frac{1}{A}$$

mithin:

$$\gamma'^2 = -\gamma''^2$$
$$\gamma'^2\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right) = \frac{1}{D} - \frac{1}{A}.$$

Setzt man diese Ausdrücke für f''^2 u. f'^2 in (65) ein, so kommt:

$$\varphi'(t_1) = -4h^2\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{A}\right)^2 \qquad \text{mithin}$$

$$\varphi'(t_1) = \pm 2hi\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{A}\right)$$

Es ist daher in der That möglich ein Argument t_1 so zu bestimmen, dass $\varphi(t_1) = 1$ u. $\varphi'(t_1) = 2hi\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{D}\right)$ wird.

Hiernach wird also:

$$\frac{d\log(\alpha+\beta i)}{dt} = \frac{hi}{A} + \frac{1}{2}\,\frac{\varphi'(t)+\varphi'(t_1)}{\varphi(t)-\varphi(t_1)}$$

Da $\varphi(t)$ unendlich wird, wenn $\sigma_3(t-t_0) = 0$ ist d. h. für $t = t_0 + \omega'$, so lässt sich vorstehende Gleichung umformen in folgende:

$$\frac{d\log(\alpha+\beta i)}{dt} = \frac{hi}{A} + \frac{\sigma'(t-t_1)}{\sigma(t-t_1)} - \frac{\sigma'(t-t_0-\omega')}{\sigma(t-t_0-\omega')} + \frac{\sigma'(t_1-t_0-\omega')}{\sigma(t_1-t_0-\omega')}$$

$$= \frac{hi}{A} + \frac{\sigma'(t-t_1)}{\sigma(t-t_1)} - \frac{\sigma_3'(t-t_0)}{\sigma_3(t-t_0)} + \frac{\sigma_3'(t_1-t_0)}{\sigma_3(t_1-t_0)}$$

Also integrirt:

$$66)\quad \alpha+\beta i = C\,\frac{\sigma(t-t_1)}{\sigma_3(t-t_0)}\,e^{(t-t_0)\left(\frac{hi}{A} + \frac{\sigma_3'(t_1-t_0)}{\sigma_3(t_1-t_0)}\right)}$$

Es bleibt noch außer der Constanten die genauere Bestimmung der Größe t_1 übrig. Nun ist aber:

$$\varphi(t) = \frac{A(D-C)}{D(A-C)}\;\frac{p(t-t_0)-e_1}{p(t-t_0)-e_3}$$

Daher:

$$\varphi'(t) = \frac{A(D-C)}{D(A-C)}\;\frac{(e_1-e_3)\,p'(t-t_0)}{(p(t-t_0)-e_3)^2}$$

also für $t = t_1$:

$$\frac{p(t_1-t_0)-e_1}{p(t_1-t_0)-e_3} = \frac{D(A-C)}{A(D-C)} \qquad \text{oder:}$$

$$67)\quad \frac{e_1-e_3}{p(t_1-t_0)-e_3} = -\frac{C(A-D)}{A(D-C)}$$

und:
$$\frac{(e_1-e_3)\,p'(t_1-t_0)}{(p(t_1-t_0)-e_3)^2} = 2hi\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{D}\right)\frac{D(A-C)}{A(D-C)} \quad \text{oder:}$$
$$p'(t_1-t_0) = 2hi\,\frac{(e_1-e_3)(D-C)(A-C)}{C^2(D-A)}$$

Hierdurch ist die Berechnung von t_1 darauf zurückgeführt, ein Argument zu bestimmen, für welches die Function p einen vorgeschriebenen Werth u. ihre Ableitung ein gegebenes Vorzeichen besitzt. Da nun entweder $A > B > D > C$ oder $A < B < D < C$ ist, so ist, wie aus (67) hervorgeht, in jedem Falle $p(t_1-t_0) < e_3$, dagegen $p'(t_1-t_0)$ im ersten Falle gleich einer negativ imaginären, im zweiten Falle gleich einer positiv imaginären Größe d.h. es liegt nach der Tabelle pag. im ersten Falle t_1-t_0 zwischen 0 u. ω', im zweiten Falle zwischen 0 u. $-\omega'$ d.h. es ist:
$$t_1-t_0 = wi,$$
wo w eine reelle Größe ist, die zwischen $+\frac{\omega'}{i}$ u. $-\frac{\omega'}{i}$ liegt. Damit ist aber die Bestimmung von t_1 gegeben. Hiernach ist:
$$68) \quad \alpha+\beta i = C\,\frac{\sigma(t-t_0-wi)}{\sigma_3(t-t_0)}\,e^{i(t-t_0)\left\{\frac{h}{A}+\frac{\sigma_3'(wi)}{i\,\sigma_3(wi)}\right\}}$$
In derselben Weise ließen sich nun auch Ausdrücke für $\alpha'+\beta' i$ u. $\alpha''+\beta'' i$ ableiten; dabei würde es aber nöthig sein zu untersuchen, ob die bei der Integration auftretenden Constanten bei allen drei Größen dieselben sind oder nicht. Es ist daher die Bemerkung von Wichtigkeit, dass sich $\alpha'+\beta' i$ u. $\alpha''+\beta'' i$ rational durch $\gamma\gamma'\gamma''$ u. $\alpha+\beta i$ ausdrücken lassen. Es ist nämlich:

$$\frac{\alpha'+\beta' i}{\alpha+\beta i} = \frac{\alpha\alpha'+\beta\beta'+i(\alpha\beta'-\alpha'\beta)}{\alpha^2+\beta^2}$$

$$69) \qquad = \frac{-\gamma\gamma'+i\gamma''}{1-\gamma^2}$$

$$\frac{\alpha''+\beta'' i}{\alpha+\beta i} = \frac{-\gamma\gamma''-i\gamma'}{1-\gamma^2}$$

Durch Einsetzen der Werthe von $\gamma\gamma'\gamma''$ u. $\alpha+\beta i$ würde man hieraus die Werthe für $\alpha'+\beta' i$ u. $\alpha''+\beta'' i$ erhalten. Ehe wir dies aber thun, formen wir die Ausdrücke von $\gamma\gamma'\gamma''$ selbst noch etwas um. Es ist nämlich aus (61) für $t = t_1$:

$$\frac{\sigma_3^2(wi)}{\sigma_1^2(wi)} = \frac{A(D-C)}{D(A-C)}, \quad \text{ferner wegen } \frac{B-C}{BC}\gamma'^2 = \frac{D-A}{AD}:$$

$$\frac{\sigma^2(wi)}{\sigma_3^2(wi)} = \frac{BCD}{(B-C)(C-D)}\,\frac{1}{h^2} \quad \text{u. wegen } \gamma''^2 = -\gamma'^2:$$

$$\frac{\sigma_2^2(wi)}{\sigma_3^2(wi)} = \frac{B(A-C)}{A(B-C)}$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\sigma_3(wi)}{\sigma_1(wi)} = \varepsilon\sqrt{\frac{A(D-C)}{D(A-C)}}$$

$$70) \qquad \frac{\sigma_2(wi)}{\sigma_1(wi)} = \varepsilon'\sqrt{\frac{B(D-C)}{D(B-C)}}$$

$$\frac{\sigma(wi)}{\sigma_1(wi)} = \varepsilon'' i\,\frac{C}{h}\sqrt{\frac{AB}{(A-C)(B-C)}}$$

Hierin ist den Wurzelgrößen der positive Werth beizulegen. Ferner sind die Quotienten $\frac{\sigma_3 u}{\sigma_1 u}$ u. $\frac{\sigma_2 u}{\sigma_1 u}$ für Werthe von u innerhalb der Grenzen ω' u. $-\omega'$ positiv, mithin ist $\varepsilon = \varepsilon' = +1$. Dagegen ist der Quotient $\frac{\sigma u}{\sigma_1 u}$ positiv oder negativ imaginär, je nachdem u zwischen 0 u. ω' oder zwischen 0 u. $-\omega'$ liegt d.h. es ist $\varepsilon'' = +1$, wenn $A > C$ u. $\varepsilon'' = -1$, wenn $A < C$ ist. Die vorstehenden Ausdrücke

sind nun aber noch nicht die in den Formeln für $\gamma\gamma'\gamma''$ vorkommenden Constanten; jedoch erhalten wir diese leicht aus jenen. Nach der zweiten Gleichung (57) ist nämlich, wenn der Wurzel ihr positiver Werth beigelegt wird:

$$\sqrt{e_1 - e_3} = h\sqrt{\frac{(B-C)(A-D)}{ABCD}}$$

Multipliciren wir nun diese Gleichung mit der zweiten resp. der dritten Gleichung (70), so ergibt sich:

$$\sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{\sigma_2(wi)}{\sigma_1(wi)} = h\sqrt{\frac{(A-D)(D-C)}{ACD^2}}$$

$$\sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{\sigma(wi)}{i\sigma_1(wi)} = \pm\sqrt{\frac{C(A-D)}{D(A-C)}}$$

Mit Berücksichtigung dieser Werthe nehmen daher die Formeln (61) die Gestalt an:

$$\gamma = -\frac{\sigma_3(wi)}{\sigma_1(wi)}\,\frac{\sigma_1(t-t_0)}{\sigma_3(t-t_0)}$$

$$71)\qquad \gamma' = \sqrt{e_1-e_3}\,\frac{\sigma_2(wi)}{\sigma_1(wi)}\,\frac{\sigma(t-t_0)}{\sigma_3(t-t_0)}$$

$$\gamma'' = \sqrt{e_1-e_3}\,\frac{\sigma(wi)}{i\sigma_1(wi)}\,\frac{\sigma_2(t-t_0)}{\sigma_3(t-t_0)}$$

Hiernach ist nun:

$$1-\gamma^2 = \frac{\sigma_1^2(wi)\,\sigma_3^2(t-t_0) - \sigma_3^2(wi)\,\sigma_1^2(t-t_0)}{\sigma_1^2(wi)\,\sigma_3^2(t-t_0)}$$, also nach Ellipt. Funct. pag.

$$1-\gamma^2 = (e_1-e_3)\,\frac{\sigma(t-t_0+wi)\,\sigma(t-t_0-wi)}{\sigma_1^2(wi)\,\sigma_3^2(t-t_0)}$$

Ferner:

$$-\gamma\gamma' + i\gamma'' = \sqrt{e_1-e_3}\,\frac{\sigma(t-t_0)\sigma_1(t-t_0)\sigma_2(wi)\sigma_3(wi) + \sigma_2(t-t_0)\sigma_3(t-t_0)\sigma(wi)\sigma_1(wi)}{\sigma_1^2(wi)\,\sigma_3^2(t-t_0)}$$

$$= \sqrt{e_1-e_3}\,\frac{\sigma(t-t_0+wi)\,\sigma_1(t-t_0-wi)}{\sigma_1^2(wi)\,\sigma_3^2(t-t_0)}$$; cfr. Ellip. F. pag

Endlich:

$$-\gamma\gamma'' - i\gamma' = \frac{\sqrt{e_1-e_3}}{i}\;\frac{\sigma_1(t-t_0)\,\sigma_2(t-t_0)\,\sigma(wi)\,\sigma_3(wi)+\sigma(t-t_0)\,\sigma_3(t-t_0)\,\sigma_1(wi)\,\sigma_2(wi)}{\sigma_1^2(wi)\,\sigma_3^2(t-t_0)}$$

d. i. $$-\gamma\gamma'' - i\gamma' = \frac{\sqrt{e_1-e_3}}{i}\;\frac{\sigma(t-t_0+wi)\,\sigma_3(t-t_0-wi)}{\sigma_1^2(wi)\,\sigma_3^2(t-t_0)}$$

Hiernach wird nun aus den Gleichungen (69):

$$\frac{\alpha'+\beta' i}{\alpha+\beta i} = \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\;\frac{\sigma_1(t-t_0-wi)}{\sigma(t-t_0-wi)}$$

$$\frac{\alpha''+\beta'' i}{\alpha+\beta i} = \frac{1}{i\sqrt{e_1-e_3}}\;\frac{\sigma_3(t-t_0-wi)}{\sigma(t-t_0-wi)}$$

Aus diesen Formeln geht hervor, dass sowohl die Constante als der Exponentialfactor für die drei Ausdrücke $\alpha+\beta i$, $\alpha'+\beta' i$, $\alpha''+\beta'' i$ dieselben sind. Es wird daher, wenn wir zur Abkürzung setzen:

$$72)\quad \frac{h}{A} + \frac{\sigma_3'(wi)}{i\,\sigma_3(wi)} = \nu$$

$$\alpha+\beta i = C\,\frac{\sigma(t-t_0-wi)}{\sigma_3(t-t_0)}\,e^{i\nu(t-t_0)}$$

$$\alpha'+\beta' i = \frac{C}{\sqrt{e_1-e_3}}\,\frac{\sigma_1(t-t_0-wi)}{\sigma_3(t-t_0)}\,e^{i\nu(t-t_0)}$$

$$\alpha''+\beta'' i = \frac{C}{i\sqrt{e_1-e_3}}\,\frac{\sigma_3(t-t_0-wi)}{\sigma_3(t-t_0)}\,e^{i\nu(t-t_0)}$$

Es bleibt also nur noch die Constante C zu bestimmen. Dazu beachte man, dass für $t=t_0$ $\gamma'=0$, also $\alpha'^2+\beta'^2=1$ ist; d. h. es ist $\alpha'+\beta' i$ eine complexe Größe, deren absoluter Betrag für $t=$? gleich 1 ist u. die demnach für $t=t_0$ die Form $e^{\mu i}$ besitzt. Also ist:

$$e^{\mu i} = \frac{C}{\sqrt{e_1-e_3}}\,\sigma_1(wi)$$

Folglich ergibt sich:

$$\alpha + \beta i = \sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{\sigma(t-t_0-wi)}{\sigma_1(wi)\,\sigma_3(t-t_0)}\,e^{i[\mu+\nu(t-t_0)]}$$

$$73) \quad \alpha' + \beta' i = \frac{\sigma_1(t-t_0-wi)}{\sigma_1(wi)\,\sigma_3(t-t_0)}\,e^{i[\mu+\nu(t-t_0)]}$$

$$\alpha'' + \beta'' i = \frac{\sigma_3(t-t_0-wi)}{i\,\sigma_1(wi)\,\sigma_3(t-t_0)}\,e^{i[\mu+\nu(t-t_0)]}$$

Um die Bedeutung der Constanten μ zu erkennen, genügt es die mechanische Bedeutung von t_0 anzugeben. t_0 ist charakterisirt als derjenige Werth von t, für welchen γ' verschwindet u. zwar indem es vom Negativen ins Positive übergeht. Da aber γ' proportional der Größe q war, so bezeichnet t_0 auch einen der Momente, in welchem q verschwindet. Nun waren $p\,q\,r$ die auf das bewegliche Achsensystem bezogenen Coordinaten eines Punktes S, welcher, auf der zur Zeit t stattfindenden Drehungsachse gelegen, durch seine Entfernung vom Anfangspunkt die augenblickliche Rotationsgeschwindigkeit angibt. Mithin bezeichnet t_0 einen derjenigen Momente, in welchem die augenblickliche Drehungsachse in die $x'z'$ Ebene fällt u. zwar beim Übergange von der negativen zur positiven Seite derselben. Diese Momente kehren periodisch wieder, da γ' die reelle Periode 4ω hat.

Durch die Formeln (71) u. (73) ist nun unsre Aufgabe vollständig gelöst, da man aus den Formeln (73) unmittelbar die Werthe von $\alpha\,\beta\,\alpha'\,\beta'\,\alpha''\,\beta''$ u. somit aus den Gleichungen (1) auch die Werthe für $x\,y\,z$ als Functionen der Zeit erhalten kann.

Überblicken wir noch einmal den eingeschlagenen Gang

der Untersuchung, so war derselbe kurz folgender: Nachdem wir das lineare Bewegungsmoment des Körpers in Bezug auf den Anfangspunkt als festen Punkt berechnet, nahmen wir das im Raume feste Achsensystem so an, dass die Componenten des Bewegungsmomentes bezüglich der x u. y Achse verschwanden u. daher die dasselbe repräsentirende Strecke mit der z Achse u. zwar mit der positiven Richtung derselben zusammenfiel. Ebenso nahmen wir als specielles bewegliches Achsensystem die drei Hauptträgheitsachsen u. setzten fest, dass zur y' Achse das mittlere Trägheitsmoment gehören solle. Die Einführung der Integrationsconstanten D machte betreffs der beiden andern Achsen eine Unterscheidung nothwendig. Wir setzten dabei fest, dass im Falle $B > D$ zur x'-Achse diejenige Achse genommen werden solle, welcher das größte Trägheitsmoment zugehört, im Falle $B < D$ aber umgekehrt. Die drei für $\gamma\gamma'\gamma''$ abgeleiteten Differentialgleichungen ergaben zunächst die Werthe von $\gamma^2\gamma'^2\gamma''^2$. Auf Grund der vorher getroffenen Entscheidung konnten dann die Vorzeichen der in $\gamma\gamma'\gamma''$ auftretenden Quadratwurzeln u. mithin die positiven Richtungen der Hauptträgheitsachsen in eindeutiger Weise so bestimmt werden, dass die Forderung der Congruenz des beweglichen u. des festen Coordinatensystems erfüllt war. Dadurch waren die Hauptschwierigkeiten des Problems beseitigt u. es konnten mit leichter Mühe die sich für die 9 Größen $\alpha\beta\gamma\ldots\gamma''$

ergebenden Ausdrücke mit Hilfe von allgemeinen Formeln aus der Theorie der elliptischen Functionen auf ihre definitive Form gebracht werden.

Sämtliche Formeln (71) u. (73) besitzen denselben Nenner; ferner kommen in denselben sämtliche σ-Functionen vor, sowohl mit reellem, als mit rein imaginärem Argumente; endlich kommen auch σ-Functionen mit complexem Argument vor, aber unter diesen fehlt allein die Function σ_2. Es ist daher bemerkenswerth, dass man auch solche Formeln erhält, welche $\sigma_2(t-t_0-\omega i)$ enthalten, wenn man noch die Coordinaten eines vierten Punktes, nämlich des Punktes S berechnet, welcher die Lage der instantanen Drehungsachse u. die Größe der Rotationsgeschwindigkeit um dieselbe bestimmt. – Die Coordinaten desselben bezogen auf das feste Achsensystem seien PQR dann ist:

$$74) \quad \begin{aligned} P &= \alpha p + \alpha' q + \alpha'' r \\ Q &= \beta p + \beta' q + \beta'' r \\ R &= \gamma p + \gamma' q + \gamma'' r \end{aligned}$$

Hieraus folgt zuerst mit Rücksicht auf (40) u. (54):

$$75) \quad R = \frac{h}{D}$$

d.h. R ist constant d.h. der Punkt S bleibt beständig in einer zur xy-Ebene parallelen Ebene. Diese Ebene ist daher absolut fest im Raume u. sie heißt daher die unveränderliche Ebene.

Ferner ist:

$$P + iQ = (\alpha + \beta i) p + (\alpha' + \beta' i) q + (\alpha'' + \beta'' i) r$$

$$\frac{P + iQ}{\alpha + i\beta} = h \left(\frac{\gamma}{A} + \frac{-\gamma\gamma' + i\gamma''}{1-\gamma^2} \frac{\gamma'}{B} + \frac{-\gamma\gamma'' - i\gamma'}{1-\gamma^2} \frac{\gamma''}{C} \right)$$

$$\frac{P + iQ}{\alpha + i\beta} = \frac{h}{1-\gamma^2} \left\{ \frac{\gamma}{A} - \gamma \left(\frac{\gamma^2}{A} + \frac{\gamma'^2}{B} + \frac{\gamma''^2}{C} \right) + \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C} \right) i \gamma' \gamma'' \right\}$$

$$76) \qquad = \frac{h}{1-\gamma^2} \left\{ \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{D} \right) \gamma + \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C} \right) i \gamma' \gamma'' \right\}$$

Nun war:

$$\frac{\sigma_3(wi)}{\sigma_1(wi)} = \sqrt{\frac{A(D-C)}{D(A-C)}} \; ; \; \frac{\sigma_2(wi)}{\sigma_1(wi)} = \sqrt{\frac{B(D-C)}{D(B-C)}} \; ; \; \frac{\sigma(wi)}{\sigma_1(wi)} = \pm \frac{iC}{h} \sqrt{\frac{AB}{(A-C)(B-C)}}$$

$$e_1 - e_3 = \frac{(B-C)(A-D)}{ABCD} h^2$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\sigma(wi)\sigma_2(wi)}{\sigma_1(wi)\sigma_3(wi)} = \pm \frac{iCB}{h} \sqrt{\frac{1}{(B-C)^2}}$$

Hierin ist das Zeichen + oder − zu nehmen, je nachdem $A > C$ oder $A < C$ ist; da aber ferner die Quadratwurzel positiv sein soll, so ist ihr Werth im ersten Falle $\frac{1}{B-C}$, im zweiten $\frac{1}{C-B}$; mithin ergibt sich in beiden Fällen:

$$\frac{\sigma(wi)\sigma_2(wi)}{\sigma_1(wi)\sigma_3(wi)} = \frac{iBC}{h(B-C)}$$

oder:

$$hi \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C} \right) = \frac{\sigma_1(wi)\sigma_3(wi)}{\sigma(wi)\sigma_2(wi)}$$

Ferner ist:

$$h \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{D} \right) = \frac{(e_1 - e_3)BC}{h(B-C)} = i(e_1 - e_3) \frac{\sigma(wi)\sigma_2(wi)}{\sigma_1(wi)\sigma_3(wi)}$$

Mithin geht die Gleichung (76), wenn wir zugleich für $\gamma\gamma'\gamma''$ ihre Werthe aus (71) einsetzen, in folgende über:

$$\frac{P + Qi}{\alpha + \beta i} = \frac{\sigma_2(t - t_0 - wi)}{i\sigma(t - t_0 - wi)}$$

folglich:

$$77) \qquad P + Qi = \sqrt{e_1 - e_3} \, \frac{\sigma_2(t - t_0 - wi)}{i\sigma_1(wi)\sigma_3(t - t_0)} \, e^{i[\mu + \nu(t - t_0)]}$$

Führen wir nun in unsere Formeln ϑ-Functionen ein, indem wir setzen:

$$\frac{t-t_0}{2\omega} = v, \quad \frac{w}{2\omega} = v', \quad \frac{h}{A} + \frac{1}{2\omega}\frac{\vartheta_3'(v'i)}{\vartheta_3(v'i)} = \lambda, \text{ so wird:}$$

$$79, \begin{cases} \gamma = -\dfrac{\vartheta_3(v'i)\,\vartheta_1(v)}{\vartheta_1(v'i)\,\vartheta_3(v)} \\ \gamma' = \dfrac{\vartheta_2(v'i)\,\vartheta(v)}{\vartheta_1(v'i)\,\vartheta_3(v)} \\ \gamma'' = \dfrac{\vartheta(v'i)\,\vartheta_2(v)}{i\,\vartheta_1(v'i)\,\vartheta_3(v)} \end{cases}$$

$$80, \begin{cases} \alpha+\beta i = \dfrac{\vartheta_2(0)\,\vartheta(v-v'i)}{\vartheta_1(v'i)\,\vartheta_3(v)}\, e^{i\{\mu+2\omega\lambda v\}} \\ \alpha'+\beta' i = \dfrac{\vartheta_3(0)\,\vartheta_1(v-v'i)}{\vartheta_1(v'i)\,\vartheta_3(v)}\, e^{i\{\mu+2\omega\lambda v\}} \\ \alpha''+\beta'' i = \dfrac{\vartheta_1(0)\,.\,\vartheta_3(v-v'i)}{i\,\vartheta_1(v'i)\,\vartheta_3(v)}\, e^{i(\mu+2\omega\lambda v)} \end{cases}$$

$$81, \begin{cases} P+iQ = \dfrac{\vartheta_0'(0)\,\vartheta_2(v-v'i)}{2\omega i\,.\,\vartheta_1(v'i)\,\vartheta_3(v)}\, e^{i(\mu+2\omega\lambda v)} \\ R = \dfrac{h}{D} \end{cases}$$

Diese Formeln lösen das vorgelegte Problem vollständig u. in dieser Gestalt sind sie besonders geeignet, die Bewegung des Körpers darzustellen. Da sämtliche ϑ-Functionen die reelle Periode 2 in Bezug auf v d.h. 4ω in Bezug auf t haben (ϑ_2 u. ϑ_3 besitzen bereits die Periode 1 resp. 2ω), so erhalten $\gamma\gamma'\gamma''$ dieselben Werthe, wenn man t um 4ω vermehrt; dagegen ändern sich die andern Größen um gewisse multiplicative Constanten. Nun ist:

$$x+yi = (\alpha+\beta i)\,x' + (\alpha'+\beta' i)\,y' + (\alpha''+\beta'' i)\,z'$$
$$z = \gamma x' + \gamma' y' + \gamma'' z',$$

mithin ist z eine periodische Function von t mit der reellen Periode 4ω; dagegen ist $x+yi$ keine periodische Function.
Setzen wir aber:

$$\bar{x}+\bar{y}i = (\bar{\alpha}+\bar{\beta}i)x' + (\bar{\alpha}'+\bar{\beta}'i)y' + (\bar{\alpha}''+\bar{\beta}''i)z'$$

u. bezeichnen mit $\bar{\alpha}+\bar{\beta}i, \ldots$ die vom Exponentialfactor freien Ausdrücke auf der rechten Seite der Gleichungen (80), so sind $\bar{x}+\bar{y}i$ u. somit auch $\bar{x}$ u. $\bar{y}$ selbst reell-periodische Functionen von t mit der Periode 4ω u. es wird, da:

$$x+yi = (\bar{x}+\bar{y}i)e^{(\mu+2\omega\lambda v)i}$$

ist:

$$x = \bar{x}\cos(\mu+2\omega\lambda v) - \bar{y}\sin(\mu+2\omega\lambda v)$$
$$y = \bar{x}\sin(\mu+2\omega\lambda v) + \bar{y}\cos(\mu+2\omega\lambda v)$$

Diese Gleichungen sagen Folgendes aus:

Denkt man sich neben dem im Raume festen Coordinatensystem noch ein andres, diesem congruentes, dessen Anfangspunkt u. z-Achse identisch sind mit dem Anfangspunkt u. der z Achse des ersteren, dessen x u. y Achsen aber beweglich sind u. zwar so, dass sie zur Zeit t mit der x- resp. y-Achse des festen Systems den Winkel $\mu+2\omega\lambda v$ bilden, so ist die Bewegung eines jeden Punktes unsres Körpers in Bezug auf dieses bewegliche Achsensystem eine periodische, so dass nach Verlauf einer Zeit 4ω jeder Punkt in Bezug auf dieses Achsensystem dieselbe Stelle wieder einnimmt wie am Anfang der Bewegung. Die absolute Bewegung des Körpers im Raume wird aber nur dann eine periodische sein, wenn die beiden Perioden 4ω u. $\frac{2\pi}{\lambda}$ in einem rationalen Verhältnisse stehen. —

Wir erhalten noch:

$$\alpha = \frac{\vartheta_2(0)\{\vartheta(v-v'i)+\vartheta(v+v'i)\}}{2\vartheta_1(v'i)\,\vartheta_3(v)}$$

$$\beta = \frac{\vartheta_2(0)\{\vartheta(v-v'i)-\vartheta(v+v'i)\}}{2i\,\vartheta_1(v'i)\,\vartheta_3(v)} \quad \text{etc.}$$

In dieser Gestalt hat Jacobi die Formeln angegeben, nur dass er statt der ϑ-Functionen seine Functionen Θ u. H verwendete.

Wir wenden uns jetzt zur genaueren Bestimmung der Constanten w, für welche war:

$$82. \qquad \frac{\sigma_3(wi)}{\sigma_2(wi)} = \sqrt{\frac{A(B-C)}{B(A-C)}} = \mathcal{E}$$

Hieraus geht hervor, dass $\mathcal{E}$ unabhängig ist von den Integrationsconstanten h u. D u. ferner, dass $\mathcal{E}$ reell u. kleiner als 1 ist, denn es ist:

$$1-\mathcal{E}^2 = \frac{C(A-B)}{B(A-C)} > 0$$

Wir setzen zunächst voraus, dass alle Trägheitsmomente voneinander verschieden seien, dann ist:

$$0 < \mathcal{E} < 1.$$

Ferner gilt die Gleichung $\quad d\,\frac{\sigma_3 u}{\sigma_2 u} = (e_2-e_3)\,\frac{\sigma u\,\sigma_1 u}{\sigma_2^2 u}\,du$,

mithin, wenn wir w als Variable ansehen:

$$d\,\frac{\sigma_3(wi)}{\sigma_2(wi)} = -(e_2-e_3)\,\frac{\sigma(wi)\,\sigma_1(wi)}{i\;\sigma_2^2(wi)}\,dw.$$

Hierin ist die rechte Seite negativ für Werthe von w zwischen 0 u. $\frac{\omega'}{i}$; denn es ist $\frac{1}{i}\sigma(wi)$ für Werthe von w zwischen 0 u. $\frac{\omega'}{i}$ reell u. positiv, ebenso $\sigma_1(wi)$ u. σ_2 ist reell, mithin sagt unsere Gleichung aus, dass, während w von 0 bis $\frac{\omega'}{i}$ wächst $\frac{\sigma_3(wi)}{\sigma_2(wi)}$ beständig abnimmt. Setzen wir nun:

83. $$\frac{\sigma_3(wi)}{\sigma_2(wi)} = \xi$$

so genügt ξ der Differentialgleichung:

$$\left(\frac{d\xi}{dw}\right)^2 = (1-\xi^2)\left((e_1-e_3)-(e_1-e_2)\xi^2\right)$$

u. wenn wir setzen:

$$\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3} = \kappa \quad , \text{ also } \quad \frac{e_1-e_2}{e_1-e_3} = 1-\kappa$$

so wird:

$$\frac{d\xi}{dw} = -\sqrt{e_1-e_3}\,\sqrt{(1-\xi^2)(1-(1-\kappa)\xi^2)}$$

worin die Wurzeln positiv zu nehmen sind u. das Zeichen − gesetzt werden muss, da mit wachsendem w ξ abnimmt. Hieraus folgt nun, da für $w=0$ $\xi=1$ ist:

84) $$w = \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\int_\xi^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-(1-\kappa)\xi^2)}}$$

Hierin ist:

$$e_1-e_3 = \frac{(B-C)(A-D)}{ABCD}\,h^2 ,$$

während:

85) $$\kappa = \frac{(A-B)(D-C)}{(B-C)(A-D)} \quad , \quad 1-\kappa = \frac{(A-C)(B-D)}{(B-C)(A-D)}$$

von h unabhängig sind u. nur die eine Integrationsconstante D enthalten. Zugleich ist:

$0<\kappa<1$, denn es ist: $\kappa>0$ u. $1-\kappa>0$.

κ kann aber die Grenzen 0 u. 1 selbst erreichen, es wird nämlich $\kappa=0$, wenn $D=C$, u. $\kappa=1$, wenn $D=B$ ist. Diese Fälle, welche wir bisjetzt ausgeschlossen haben, müssen wir nun noch in Betracht ziehen. Wir bemerken, dass so lange die drei Hauptträgheitsmomente voneinander verschieden sind was wir auch für das folgende noch voraussetzen wollen,

nie $D = A$ werden kann, da ja die Achsen so gewählt sind, dass D stets zwischen den Grenzen B u. C liegt u. zwar entweder so, dass $A > B > D > C$ oder $A < B < D < C$ ist. Es sind daher nur die Fälle $D = C$ u. $D = B$ zu untersuchen.

Es sei zunächst $D = C$.

Es gelten allgemein die Formeln:

$$\gamma = -\sqrt{\frac{A(D-C)}{D(A-C)}} \cdot \frac{\sigma_1(t-t_0)}{\sigma_3(t-t_0)}$$

$$\gamma' = \sqrt{e_1-e_3}\sqrt{\frac{B(D-C)}{D(B-C)}} \cdot \frac{\sigma(t-t_0)}{\sigma_3(t-t_0)}$$

$$\gamma'' = \pm\sqrt{e_1-e_3}\sqrt{\frac{A \cdot B}{(B-C)(A-C)}} \cdot \frac{C}{h} \cdot \frac{\sigma_2(t-t_0)}{\sigma_3(t-t_0)}$$

In dem Falle $D = C$ wird nun $\kappa = 0$, also $e_2 = e_3$. Dann ist aber: $\omega' = \infty$ und:

$$86) \quad \begin{aligned} \sigma u &= \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}e_1}}\, e^{\frac{1}{4}e_1 u^2} \sin\left(u\sqrt{\tfrac{3}{2}e_1}\right) \\ \sigma_1 u &= e^{\frac{1}{4}e_1 u^2} \cos\left(u\sqrt{\tfrac{3}{2}e_1}\right) \\ \sigma_2 u = \sigma_3 u &= e^{\frac{1}{4}e_1 u^2} \end{aligned}$$

Die Functionen σ besitzen also für $e_2 = e_3$ resp. $\omega' = \infty$ bestimmte endliche Werthe.

u. es ist mithin:

$$87. \quad \gamma = 0, \quad \gamma' = 0, \quad \gamma'' = \pm 1.$$

u. daher nach Formel (76) $P + iQ = 0$ oder:

$$P = 0 \quad Q = 0$$

d.h. die Richtung der instantanen Drehungsachse fällt in jedem Augenblick mit der Richtung der positiven z-Achse zusammen u. es ist daher die Bewegung des Körpers eine mit constanter Winkelgeschwindigkeit um die z-Achse stattfindende Rotationsbewegung. Wie sich die α, β gestalten, kann man am

besten aus folgender Formel entnehmen:

$$\frac{d\log(\alpha+\beta i)}{dt} = \frac{hi}{A} + \frac{\gamma\frac{d\gamma}{dt} + hi\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{D}\right)}{\gamma^2-1}.$$

Daraus wird in unserem Falle:

$$d\log(\alpha+\beta i) = \frac{hi}{C}\,dt$$

$$\alpha+\beta i = \text{const.}\; e^{\frac{hi}{C}t}$$

Da nun $\gamma = 0$ ist, so ist $|\alpha+\beta i| = 1$, mithin kann die Integrationsconstante auf die Form gebracht werden:

$$\text{const.} = e^{-\frac{ht_0}{C}i}$$

mithin erhalten wir:

$$88) \quad \alpha+\beta i = e^{\frac{h}{C}(t-t_0)i}$$

oder:

$$\alpha = \cos\left(\frac{h}{C}(t-t_0)\right), \quad \beta = \sin\left(\frac{h}{C}(t-t_0)\right), \quad \gamma = 0$$

Ferner ist:

$$\frac{\alpha'+\beta' i}{\alpha+\beta i} = \frac{-\gamma\gamma' + i\gamma''}{1-\gamma^2} = \pm i, \quad \text{also:}$$

$$88) \quad \alpha'+\beta' i = \pm i\, e^{\frac{h}{C}(t-t_0)i} \quad \text{d. h.}$$

$$\alpha' = \mp \sin\frac{h}{C}(t-t_0), \quad \beta' = \pm\cos\frac{h}{C}(t-t_0), \quad \gamma' = 0$$

Ferner:

$$\frac{\alpha''+\beta'' i}{\alpha+\beta i} = \frac{-\gamma\gamma'' - i\gamma'}{1-\gamma^2} = 0, \quad \text{also}$$

$$88) \quad \alpha''+\beta'' i = 0 \quad \text{oder:}$$

$$89) \quad \alpha'' = 0, \quad \beta'' = 0, \quad \gamma'' = \pm 1$$

Hiernach folgt nun aus den Gleichungen (89), dass diejenige Hauptträgheitsachse, zu welcher das Moment C gehört, im Falle dass $D = C$ ist, mit der z-Achse zusammenfällt, so dass also die Bewegung eine gewöhnliche Rotationsbewegung um diejenige Hauptträgheitsachse ist, zu der das Moment C gehört.

Betrachten wir noch den Fall, dass D nur unendlich wenig von C verschieden ist. Dann muss, da $\frac{\sigma_1}{\sigma_3}$ u. $\frac{\sigma}{\sigma_3}$ stets endlich sind, γ u. γ' beständig sehr klein also γ'' sehr nahe gleich 1 sein. Es sind daher auch p u. q beständig sehr klein, d.h. die augenblickliche Drehungsachse wird mit der Hauptträgheitsachse C stets sehr nahe zusammenfallen. Ferner ist:

$$\frac{d\log(\alpha+\beta i)}{dt} = \frac{-\gamma\frac{d\gamma}{dt}}{1-\gamma^2} + \frac{hi}{A} + \frac{hi\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{D}\right)}{\gamma^2-1}, \quad \text{also:}$$

$$\log(\alpha+\beta i) = \log\sqrt{1-\gamma^2} + \frac{hi}{A}(t-t_0) + \int_{t_0}^{t}\frac{hi\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{D}\right)}{1-\gamma^2}\,dt$$

mithin sehr nahe:

$$\log(\alpha+\beta i) = \frac{hi}{A}(t-t_0) + hi\left\{\frac{1}{A}-\frac{1}{D}\right\}(t-t_0)$$

oder:

$$\alpha+\beta i = e^{\frac{h(t-t_0)}{C}i}$$

Ferner ist:

$$\frac{\alpha''+\beta''i}{\alpha+\beta i} = \frac{-\gamma\gamma''-i\gamma'}{1-\gamma^2} \quad \text{sehr nahe} = 0$$

Daraus schliessen wir, da $\alpha+\beta i$ stets einen endlichen Werth hat:

α'' stets sehr nahe $= 0$
β'' " " " $= 0$
γ'' " " " $= 1$.

Mithin können wir sagen:

Wenn die Grösse D der Grösse C sehr nahe kommt, so vollzieht die Achse, der das Trägheitsmoment C entspricht, während der ganzen Dauer der Bewegung nur kleine Schwankungen um die z Achse u. die Rotationsachse fällt in jedem Augenblick sehr nahe mit der z Achse zusammen.

Wir gehen jetzt über zu dem Falle, dass die Constante $D = B$ ist. In diesem Falle wird $e_1 = e_2$ u. die reelle Periode unendlich

groß. Nun ist allgemein, wenn $e_\beta = e_\gamma$ ist:

$$\sigma u = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2} e_\alpha}} e^{\frac{1}{4} e_\alpha \cdot u^2} \sin\left(u\sqrt{\tfrac{3}{2} e_\alpha}\right)$$

90, $$\sigma_\alpha u = e^{\frac{1}{4} e_\alpha u^2} \cos\left(u\sqrt{\tfrac{3}{2} e_\alpha}\right)$$

$$\sigma_\beta u = \sigma_\gamma u = e^{\frac{1}{4} e_\alpha u^2}.$$

In unserem Falle ist nun $\beta = 1$, $\gamma = 2$, $\alpha = 3$, also:

$$e_3 = -(e_1 + e_2) = -2e_1$$

$$\frac{3e_3}{2} = -3e_1, \quad e_1 - e_3 = -\frac{3e_3}{2},$$ und da

$$e_1 - e_3 = \frac{(B-C)(A-B)}{AC} \frac{h}{B}$$ ist, so haben wir, wenn wir setzen:

91. $$g = \frac{h}{B}\sqrt{\frac{(B-C)(A-B)}{AC}}$$

$$\sqrt{\tfrac{3}{2} e_3} = ig$$

u. daher:

$$\sigma u = e^{-\frac{1}{6} g^2 u^2} \frac{e^{gu} - e^{-gu}}{2g}$$

92, $$\sigma_3 u = e^{-\frac{1}{6} g^2 u^2} \frac{e^{gu} + e^{-gu}}{2}$$

$$\sigma_1 u = \sigma_2 u = e^{-\frac{1}{6} g^2 u^2}$$

Nun war:

$$w = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \int_\varepsilon^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-(1-\kappa)\xi^2)}}$$

wobei:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{A(B-C)}{B(A-C)}}$$, folglich für $\kappa = 1$:

$$w = \frac{1}{g}\int_\varepsilon^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$, oder

93, $$\varepsilon = \cos(gw)$$

Berücksichtigen wir diese Gleichungen (92)(93), so gehen die Werthe der γ über in die folgenden:

$$\gamma = -\cos(gw) \cdot \frac{2}{e^{g(t-t_0)} + e^{-g(t-t_0)}}$$

$$94) \quad \gamma' = \frac{e^{g(t-t_0)} - e^{-g(t-t_0)}}{e^{g(t-t_0)} + e^{-g(t-t_0)}}$$

$$\gamma'' = \pm \sin(gw) \frac{2}{e^{g(t-t_0)} + e^{-g(t-t_0)}}$$

Hieraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= 0 \\ \gamma' &= +1 \\ \gamma'' &= 0 \end{aligned}\right\} \text{für } t = +\infty \qquad \left.\begin{aligned} \gamma &= 0 \\ \gamma' &= -1 \\ \gamma'' &= 0 \end{aligned}\right\} \text{für } t = -\infty$$

Mithin durchläuft γ' in dem Zeitraum $t = -\infty$ bis $t = +\infty$ alle Werthe von -1 bis $+1$, sodass also keine Stabilität stattfindet.

Ferner ergibt sich:

$$95) \quad \alpha + \beta i = \frac{e^{g(t-t_0-wi)} - e^{-g(t-t_0-wi)}}{e^{g(t-t_0)} + e^{-g(t-t_0)}} \, e^{\{\mu + \nu(t-t_0)\}i}$$

$$\alpha' + \beta' i = \frac{2}{e^{g(t-t_0)} + e^{-g(t-t_0)}} \, e^{\{\mu + \nu(t-t_0)\}i}$$

$$95) \quad \alpha'' + \beta'' i = \frac{e^{g(t-t_0-wi)} + e^{-g(t-t_0-wi)}}{e^{g(t-t_0)} + e^{-g(t-t_0)}} \, e^{\{\mu + \nu(t-t_0)\}i}$$

$$P + Qi = \frac{g}{i} \, \frac{2}{e^{g(t-t_0)} + e^{-g(t-t_0)}} \, e^{\{\mu + \nu(t-t_0)\}i}$$

$$R = \frac{h}{B}$$

Hierin ist überall:

$$\nu = \frac{h}{A} + g \operatorname{tg}(gw)$$

Es geht hieraus hervor, dass mit wachsendem t P u. Q sich der Grenze 0 nähern, während R constant bleibt. Ferner nähern sich für $t = \pm\infty$ α' u. β' der Grenze 0, während γ' für

$t = +\infty$ gleich $+1$, für $t = -\infty$ gleich -1 war. Daraus folgt:
1, die instantane Drehungsachse nähert sich mit wachsender Zeit immer mehr der z Achse.
2, die Trägheitsachse, zu welcher das mittlere Trägheitsmoment B gehört, nähert sich ebenfalls mit der Zeit mehr u. mehr der z Achse.

Folglich fällt an der Grenze der Zeit die instantane Drehungsachse mit der Achse des mittleren Trägheitmomentes zusammen.

Es findet also in diesem Falle keine Rotation um eine feste Achse statt, wie im Falle $D = C$, weil jetzt P u. Q veränderliche Größen sind.

Hätten wir gleich von vorn herein die Frage aufgeworfen, ob auch die mittlere Trägheitsachse eine beständige Rotationsachse sein könne, so würden wir gesehen haben, dass dieser Fall wirklich eintritt, wenn für jeden Werth von t:

$$\gamma = 0 \qquad \gamma' = \pm 1 \qquad \gamma'' = 0$$

ist. Dann erhielten wir aus unseren Differentialgleichungen

$$\alpha + \beta i = e^{\frac{hi}{B}(t-t_0)}$$
$$\alpha' + \beta' i = 0$$
$$\alpha'' + \beta'' i = -i\, e^{\frac{hi}{B}(t-t_0)}$$
$$P + Qi = 0$$
$$R = \text{const}$$

u. es fiele dann in der That die mittlere Hauptträgheitsachse mit der z Achse u. ebenso die instantane Drehungsachse mit der z-Achse zusammen, so dass also die Achse des mittleren Träg-

heitsmomentes eine beständige Rotationsachse wäre. Der Fall $\gamma = 0$, $\gamma' = \pm 1$, $\gamma'' = 0$ entspricht nach Formel (54) dem Falle $D = B$; er müßte also in dem eben besprochenen Falle enthalten sein. Andrerseits aber fanden wir vorhin, dass die mittlere Hauptträgheitsachse keine beständige Rotationsachse wäre. Wie klärt sich nun dieser Widerspruch auf? Es liegt dieser an dem Werthe der Constanten t_0. Wenn nämlich D näher u. näher an B heranrückt, so wird auch die Größe ω mehr u. mehr zunehmen, also kann auch t_0 einen immer größeren Werth erhalten. Geht man zur Grenze $D = B$ über, so muß t_0 jeden möglichen Werth erhalten können u. kann so groß werden als man will, also auch gleich $\pm\infty$ werden. Dadurch kommen wir auf jenen Fall. Die Bedeutung von t_0 ist folgende. Für $t = t_0$ wird im Falle $D = B$ noch immer $\gamma' = 0$ d.h. t_0 ist einer derjenigen Momente, in denen der Punkt S von der negativen zur positiven Seite der $x'z'$-Ebene übergeht. Wenn nun dieser Moment ... in unserm Falle gibt es nur einen solchen, da γ' nicht reell periodisch ist ... sehr weit zurückliegt, so ist $t_0 = -\infty$ u. es ist für jeden Werth von t:

$$\gamma = 0 \qquad \gamma' = 0 \;, \quad \gamma'' = 0$$

$$\alpha + \beta i = e^{+g\pi i}\, e^{(\lambda + \nu t)i} \cdot e^{\tau_0 i} = e^{\nu(t-\delta)i} \;, \quad \tau_0 = -t_0\nu \bmod 2.$$

$$\alpha' + \beta' i = 0$$

$$\alpha'' + \beta'' i = -i\, e^{\nu(t-\delta)i}$$

$$P + iQ = 0$$

Liegt aber dieser Moment in ferner Zukunft, so ist $t_0 = +\infty$ u. es ist für jeden Werth von t:

$$\gamma = 0 \quad , \quad \gamma' = -1 \quad , \quad \gamma'' = 0 .$$
$$\alpha + \beta i = e^{\nu(t-\delta')i}$$
$$\alpha' + \beta' i = 0$$
$$\alpha'' + \beta'' i = i e^{\nu(t-\delta)i}$$

u. in beiden Fällen ist thatsächlich die Achse des mittleren Trägheitsmomentes eine freie Rotationsachse, so dass also dieser Fall wirklich in den für den Fall $D = B$ aufgestellten Formeln enthalten ist.

Die besonderen Fälle, dass zwei der Trägheitsmomente einander gleich sind, sind sehr einfach zu behandeln. Man geht dabei am einfachsten auf die Differentialgleichungen zurück, da sich diese dann leicht integriren lassen. Wir nehmen z. B. $A > B > C$ an u. setzen $A = B$. Dann wird:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{B-C}{BC} h \gamma' \gamma'' = \lambda \gamma' \gamma''$$
$$\frac{d\gamma'}{dt} = \frac{C-A}{AC} h \gamma'' \gamma = -\lambda \gamma'' \gamma$$
$$\frac{d\gamma''}{dt} = \frac{A-B}{AB} h \gamma \gamma' = 0 \quad ,$$

folglich:
$$\gamma'' = \text{const} = C$$
$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} = -\lambda^2 C^2 \gamma \quad , \quad \frac{d^2\gamma'}{dt^2} = -\lambda^2 C^2 \gamma'$$

mithin:
$$\gamma = C_1 \cos(\lambda C t) \quad , \quad \gamma' = C_2 \sin(\lambda C t)$$

Man erhält auf diese Weise Formeln, in denen nur trigonometrische Functionen vorkommen.

Wir wollen jetzt noch einen Fall der Rotation, welcher sich vollständig durch elliptische Functionen erledigen lässt, auf-

stellen. Wir führen statt der 9 Größen $\alpha\ \beta\ ..\ \gamma''$ andre ein, nämlich nach Euler drei Größen $\lambda\ \mu\ \nu$, durch welche sich jene 9 Coefficienten in durchaus symmetrischer Weise ausdrücken lassen. Noch besser ist es nach Weierstrass die Quotienten $\frac{\lambda}{\rho}, \frac{\mu}{\rho}, \frac{\nu}{\rho}$ einzuführen, dabei aber diesen vier Größen die Bedingungsgleichung:

$$\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\rho^2 = 1$$

vorzuschreiben. Es ist:

$$(\alpha+\beta i)^2+(\alpha'+\beta' i)^2+(\alpha''+\beta'' i)^2 = 0$$

u. diese Gleichung kann man in allgemeinster Weise dadurch erfüllen, dass man setzt:

$$96)\quad \begin{aligned} \alpha+\beta i &= g^2-h^2 \\ \alpha'+\beta' i &= -(g^2+h^2)i \\ \alpha''+\beta'' i &= 2gh \end{aligned}$$

Umgekehrt sieht man, dass man stets zwei Größen g u. h in dieser Weise bestimmen kann, denn es ist:

$$2g^2 = (\alpha+\beta i)+i(\alpha'+\beta' i)$$
$$2h^2 = (\alpha+\beta i)+i(\alpha'+\beta' i)$$

Wird hierbei das Vorzeichen von g willkürlich gewählt, so ist das von h durch die dritte Gleichung (96) bestimmt. Wir setzen nun unter $\lambda, \mu\ \nu\ \rho$ reelle Größen verstehend:

$$97)\quad g = \lambda+\mu i \quad , \quad h = \nu+\rho i$$

Dann ist:

$$98)\quad \begin{array}{lll} \alpha = \rho^2+\lambda^2-\mu^2-\nu^2 \ , & \alpha' = 2(\lambda\mu+\nu\rho) & \alpha'' = 2(\nu\lambda-\mu\rho) \\ \beta = 2(\lambda\mu-\nu\rho) & \beta' = \rho^2-\lambda^2+\mu^2-\nu^2 & \beta'' = 2(\mu\nu+\lambda\rho) \end{array}$$

Da nun $\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2 = 1$ ist, so haben wir:

$$99)\quad \lambda^2+\mu^2+\nu^2+\rho^2 = 1$$

Ferner folgt aus (8) mit Rücksicht auf

98) $\gamma = 2(\nu\lambda + \mu\varrho)$, $\gamma' = 2(\mu\nu - \lambda\varrho)$, $\gamma'' = \varrho^2 - \lambda^2 - \mu^2 + \nu^2$.

Durch die Gleichungen werden also die Größen $\alpha\beta \ldots \gamma''$ durch die vier Größen $\lambda, \mu\, \nu\, \varrho$ ausgedrückt.

Zwischen den xyz u. $x'y'z'$ bestehen dann nach (1) folgende Transformationsformeln:

$$x = (2\varrho^2 - 1)x' + 2\lambda(\lambda x' + \mu y' + \nu z') + 2\varrho(\nu y' - \mu z')$$

100) $$y = (2\varrho^2 - 1)x' + 2\mu(\lambda x' + \mu y' + \nu z') + 2\varrho(\lambda z' - \nu x')$$

$$z = (2\varrho^2 - 1)x' + 2\nu(\lambda x' + \mu y' + \nu z') + 2\varrho(\mu x' - \lambda y')$$

Setzt man:

$$x' = \lambda\alpha \qquad\qquad x = \lambda\alpha$$
$$y' = \mu\alpha \quad \text{so wird:} \quad y = \mu\alpha$$
$$z' = \nu\alpha \qquad\qquad z = \nu\alpha$$

d.h. der Punkt P, dessen Coordinaten $\lambda\mu\nu$ sind, hat in Bezug auf beide Achsensysteme dieselben Coordinaten; dasselbe gilt von allen Punkten der Geraden OP. Es bestimmen daher die Größen $\lambda\mu\nu$ eine gewisse Gerade OP. Dreht man das eine Achsensystem um diese Gerade, so kann man dasselbe in das andre System überführen. Ferner besteht ein gewisser Zusammenhang zwischen ϱ u. dem Winkel, um welchen gedreht werden muss, worauf wir aber nicht näher eingehen.

Weiter ergibt sich:

101)
$$1 + \alpha + \beta' + \gamma'' = 4\varrho^2$$
$$1 + \alpha - \beta' - \gamma'' = 4\lambda^2$$
$$1 - \alpha + \beta' - \gamma'' = 4\mu^2$$
$$1 - \alpha - \beta + \gamma'' = 4\nu^2$$

102)
$$\gamma' - \beta'' = 4\lambda\varrho \quad , \quad \alpha'' - \gamma = -4\mu\varrho \quad , \quad \beta - \alpha' = -4\nu\varrho$$
$$\gamma' + \beta'' = 4\mu\nu \quad , \quad \alpha'' + \gamma = 4\nu\lambda \quad , \quad \beta + \alpha' = 4\lambda\mu$$

Daraus sieht man, wenn man für irgend eine der Größen $\lambda\mu\nu\varrho$ das Zeichen festgestellt hat, so erhält man damit auch das Zeichen der übrigen Größen. Nun war nach 17.

$$p\,dt = \alpha''d\alpha' + \beta''d\beta' + \gamma''d\gamma'$$

Hieraus folgt durch einfache Rechnung:

$$p\,dt = 2\left\{\lambda d\varrho - \varrho d\lambda + \nu d\mu - \mu d\nu\right\} \quad \text{analog:}$$

$$103, \quad q\,dt = 2\left\{\mu d\varrho - \varrho d\mu + \lambda d\nu - \nu d\lambda\right\}$$

$$r\,dt = 2\left\{\nu d\varrho - \varrho d\nu + \mu d\lambda - \lambda d\mu\right\}$$

$$0 = \varrho d\varrho + \mu d\mu + \nu d\nu + \lambda d\lambda.$$

woraus:

$$2\frac{d\lambda}{dt} = -p\varrho - q\nu + r\mu$$

$$104, \quad 2\frac{d\mu}{dt} = -q\varrho - r\lambda + p\nu$$

$$2\frac{d\nu}{dt} = -r\varrho - p\mu + q\lambda$$

$$2\frac{d\varrho}{dt} = \lambda p + \mu q + \nu r.$$

Fügen wir zu diesen vier Gleichungen noch die drei Gleichungen (33) so haben wir 7 Differentialgleichungen zur Bestimmung der 7 Größen $\lambda\mu\nu\varrho\, pqr$.

Wir machen nun die Annahme, dass der Körper sich allein unter der Einwirkung der Schwere um einen festen Punkt bewege, der nicht der Schwerpunkt ist:

Dann ist:

$$105, \quad X = 0 \qquad Y = 0 \qquad Z = 2g \qquad \text{also:}$$

$$X' = 2g\gamma, \quad Y' = 2g\gamma', \quad Z' = 2g\gamma''.$$

und:

$$\Sigma m(y'Z' - z'Y') = 2g\,\Sigma m(y'\gamma'' - z'\gamma') = 2g\left\{\gamma''\Sigma m y' - \gamma'\Sigma m z'\right\}$$

Bezeichnen wir ferner mit $x_0\ y_0\ z_0$ die Coordinaten des Schwerpunktes, bezogen auf das beweg. System, mit M die Masse u. mit K das Gewicht des Körpers, so dass also $K = M\cdot 2g$ ist, so haben wir zu (104) noch die drei Gleichungen:

$$106)\quad \begin{aligned} A\frac{dp}{dt} &= (B-C)qr + K(y_0\gamma'' - z_0\gamma') \\ B\frac{dq}{dt} &= (C-A)rp + K(z_0\gamma - x_0\gamma'') \\ C\frac{dr}{dt} &= (A-B)pq + K(x_0\gamma' - y_0\gamma) \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (104) u. (106) sind nun die Grössen $\lambda\,\mu\,\nu\,\varrho\,p\,q\,r$ als Functionen der Zeit zu berechnen.

Dazu machen wir aber die weitere Annahme, dass die beiden Hauptträgheitsmomente A u. B unseres Körpers einander gleich seien u. dass der Schwerpunkt in der dritten Trägheitsachse liege. Dann ist $x_0 = y_0 = 0$ u. es vereinfachen sich die vorstehenden Gleichungen zu folgenden:

$$107)\quad \begin{aligned} A\frac{dp}{dt} &= (A-C)qr - 2H(\nu\mu - \varrho\lambda) \\ A\frac{dq}{dt} &= -(A-C)rp + 2H(\nu\lambda + \varrho\mu) \\ \frac{dr}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

worin $Kz_0 = H$ gesetzt ist. Das System der Gleichungen (104)(107) können wir jetzt zu folgenden vier Gleichungen zusammenfassen:

$$108)\quad \begin{aligned} A\frac{d(p+qi)}{dt} &= -i(A-C)r(p+qi) + 2Hi(\lambda+\mu i)(\nu-\varrho i) \\ r &= \text{const} \\ \frac{d(\lambda+\mu i)}{dt} &= \frac{i}{2}(p+qi)(\nu+\varrho i) - \frac{ri}{2}(\lambda+\mu i) \\ \frac{d(\nu+\varrho i)}{dt} &= \frac{i}{2}(p-qi)(\lambda+\mu i) + \frac{ri}{2}(\nu+\varrho i) \end{aligned}$$

Hieraus folgt unmittelbar:

$$\frac{d\log(\lambda+\mu i)}{dt} = -\tfrac{1}{2}ri + \tfrac{1}{2}i\,\frac{(p+qi)(\nu+\varrho i)(\lambda-\mu i)}{\lambda^2+\mu^2}$$

$$\frac{d\log(\nu+\varrho i)}{dt} = \tfrac{1}{2}ri + \tfrac{1}{2}i\,\frac{(p-qi)(\nu-\varrho i)(\lambda+\mu i)}{\nu^2+\varrho^2}$$

$$A\,\frac{d\log(p+qi)}{dt} = i(A-C)r + 2Hi\,\frac{(p-qi)(\nu-\varrho i)(\lambda+\mu i)}{p^2+q^2}$$

Setzt man jetzt:

$$109)\qquad (\lambda+\mu i)(\nu-\varrho i)(p-qi) = \xi + i\,\xi_1,$$

so gehen vorstehende Gleichungen über in:

$$\frac{d\log(\lambda+\mu i)}{dt} = -\tfrac{1}{2}ri + \tfrac{1}{2}i\,\frac{\xi - i\,\xi_1}{\lambda^2+\mu^2}$$

$$110)\qquad \frac{d\log(\nu+\varrho i)}{dt} = \tfrac{1}{2}ri + \tfrac{1}{2}i\,\frac{\xi + i\,\xi_1}{\nu^2+\varrho^2}$$

$$A\,\frac{d\log(p+qi)}{dt} = -i(A-C)r + 2Hi\,\frac{\xi + i\,\xi_1}{p^2+q^2}$$

Setzen wir in diesen Gleichungen $-i$ statt i u. addiren die entsprechenden Größen, so wird:

$$\frac{d\log(\lambda^2+\mu^2)}{dt} = \frac{\xi_1}{\lambda^2+\mu^2}$$

$$\frac{d\log(\nu^2+\varrho^2)}{dt} = \frac{-\xi_1}{\nu^2+\varrho^2}$$

$$\frac{d\log(p^2+q^2)}{dt} = -\frac{4H}{A}\,\frac{\xi_1}{p^2+q^2}$$

Da nun aber:

$$d\log(\lambda^2+\mu^2) = \frac{1}{\lambda^2+\mu^2}\,d(\lambda^2+\mu^2)$$

ist, so erhalten wir hieraus sehr einfach:

$$d(\lambda^2+\mu^2) = \xi_1\,dt$$

$$111)\qquad d(\nu^2+\varrho^2) = \xi_1\,dt$$

$$d(p^2+q^2) = -\frac{4H}{A}\,\xi_1\,dt.$$

Zwischen ξ u. ξ_1 besteht eine einfache Relation. Es ist näm-

lich nach (109):

$$d\log(\lambda+\mu i)+d\log(\nu-\varrho i)+d\log(p-qi)=d\log(\xi+\xi_1 i)$$

folglich wegen (110):

$$\frac{d}{dt}\log(\xi+\xi_1 i)=-\frac{C}{A}ri+\frac{i}{2}(\xi-\xi_1 i)\left\{\frac{1}{\lambda^2+\mu^2}-\frac{1}{\nu^2+\varrho^2}-\frac{4H}{A(p^2+q^2)}\right\}$$

oder:

$$\frac{d}{dt}(\xi+i\xi_1)=-\frac{C}{A}ri(\xi+i\xi_1)+\frac{i}{2}(\xi^2+\xi_1^2)\left\{\frac{1}{\lambda^2+\mu^2}-\frac{1}{\nu^2+\varrho^2}-\frac{4H}{A(p^2+q^2)}\right\}$$

Setzt man hierin die reellen Theile beider Seiten einander gleich, so wird:

$$112)\quad \frac{d\xi}{dt}=\frac{C}{A}r\xi_1$$

u. es gehen daher die Gleichungen (111) in folgende über:

$$d(\lambda^2+\mu^2)=\frac{A}{Cr}d\xi$$

$$d(\nu^2+\varrho^2)=-\frac{A}{Cr}d\xi$$

$$d(p^2+q^2)=-\frac{4H}{Cr}d\xi$$

aus denen durch Integration folgt:

$$113)\quad \begin{aligned}\lambda^2+\mu^2&=\frac{A}{Cr}(\xi-c_1)\\ \nu^2+\varrho^2&=-\frac{A}{Cr}(\xi-c_2)\\ p^2+q^2&=-\frac{4H}{Cr}(\xi-c_3)\end{aligned}$$

Darin bedeuten $c_1\ c_2\ c_3\ r$ willkürliche Integrationsconstanten. Nun ist aber nach (109):

$$\xi^2+\xi_1^2=(\lambda^2+\mu^2)(\nu^2+\varrho^2)(p^2+q^2)$$

folglich mit Rücksicht auf (112) u. (113)

$$(114)\quad \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2=-\frac{C^2r^2}{A^2}\xi^2+\frac{4H}{Cr}(\xi-c_1)(\xi-c_2)(\xi-c_3)=R(\xi)$$

Durch diese Gleichung ist nun ξ als elliptische Function von t bestimmt. Dabei ist zu bemerken, dass infolge der Gleichung (99) zwischen den Integrationsconstanten eine Relation besteht.

Dieselbe ist:

$$\frac{A}{Cr}(c_2 - c_1) = 1 \qquad \text{oder:}$$

$$r = \frac{A(c_2 - c_1)}{C}$$

Daher ist:

$$115) \quad R(\xi) = -(c_2 - c_1)^2 \xi^2 + \frac{4H}{A(c_2 - c_1)} (\xi - c_1)(\xi - c_2)(\xi - c_3)$$

Bringen wir jetzt noch mit Hilfe der eben abgeleiteten Relationen die Formeln (110) auf ihre definitive Gestalt, so haben wir zur Bestimmung der Grössen $\lambda \mu \nu \varrho p q r$ folgendes Gleichungssystem:

$$116) \quad \begin{aligned} &a) \quad \frac{d \log(\lambda + \mu i)}{dt} = \frac{C - A}{2C}(c_2 - c_1) i + \frac{1}{2} \frac{\frac{d\xi}{dt} + c_1(c_2 - c_1) i}{\xi - c_1} \\ &b) \quad \frac{d \log(\nu + \varrho i)}{dt} = -\frac{C - A}{2C}(c_2 - c_1) i + \frac{1}{2} \frac{\frac{d\xi}{dt} - c_2(c_2 - c_1) i}{\xi - c_2} \\ &c) \quad \frac{d \log(p + q i)}{dt} = \frac{C - 2A}{C}(c_2 - c_1) i + \frac{1}{2} \frac{\frac{d\xi}{dt} - c_3(c_2 - c_1) i}{\xi - c_3} \\ &d) \quad r = \frac{A(c_2 - c_1)}{C} \\ &e) \quad \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 = R(\xi) \end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung ergibt sich ξ als elliptische Function von t, also:

$$\xi = \varphi(t)$$

Da nun ferner:

$$R(c_\lambda) = -(c_2 - c_1)^2 c_\lambda^2$$

ist, so kann man drei Argumente $t_1\, t_2\, t_3$ so bestimmen, dass:

$$117) \quad \begin{aligned} \varphi(t_1) &= c_1 \quad , \quad \varphi'(t_1) = c_1 (c_2 - c_1) i \\ \varphi(t_2) &= c_2 \quad , \quad \varphi'(t_2) = -c_2 (c_2 - c_1) i \\ \varphi(t_3) &= c_3 \quad , \quad \varphi'(t_3) = -c_3 (c_2 - c_1) i \end{aligned}$$

wird u. es ist dann:

$$\frac{d\log(\lambda+\mu i)}{dt} = \frac{C-A}{2C}(c_2-c_1)i + \frac{1}{2}\frac{\varphi'(t)+\varphi'(t_1)}{\varphi(t)-\varphi(t_1)}$$

$$118)\quad \frac{d\log(\nu+\varrho i)}{dt} = -\frac{C-A}{2C}(c_2-c_1)i + \frac{1}{2}\frac{\varphi'(t)+\varphi'(t_2)}{\varphi(t)-\varphi(t_2)}$$

$$\frac{d\log(p+qi)}{dt} = \frac{C-2A}{C}(c_2-c_1)i + \frac{1}{2}\frac{\varphi'(t)+\varphi'(t_3)}{\varphi(t)-\varphi(t_3)}.$$

Wir legen nun die z'Achse so, dass der Schwerpunkt in die positive z'Achse fällt; dann ist z_0 positiv, also auch H positiv u. reell. Ferner müssen wir für das folgende die beiden Fälle $r > 0$ u. $r < 0$ unterscheiden, da dies für die Bestimmung der Größen $t_1\ t_2\ t_3$ wesentlich ist. Es sei zunächst:

$$119)\quad r > 0.$$

dann ist nach (116 d) $c_2 > c_1$, ferner nach (113) $\xi > c_1$ u. $\xi < c_2$ also:

$$c_2 > \xi > c_1$$

Legen wir nun dem ξ einen Werth ξ_0 bei, den es für $t = t_0$ wirklich annimmt, so ist $R(\xi_0) > 0$ u. es liegt ξ_0 zwischen c_1 u. c_2. Nun ist aber:

$$R(c_1) < 0 \quad , \quad R(c_2) < 0$$

woraus folgt, dass die Gleichung $R(\xi) = 0$ eine reelle Wurzel zwischen c_1 u. ξ_0 u. eine ebensolche zwischen ξ_0 u. c_2 besitzt. Da aber ξ_0 zwischen c_1 u. c_2 liegt, so sind diese beiden Wurzeln getrennt u. es besitzt somit die Gleichung $R(\xi) = 0$ zwei, mithin auch drei reelle Wurzeln u. zwar liegt die dritte, da $R(+\infty) > 0$ ist, zwischen c_3 u. $+\infty$ oder zwischen c_2 u. $+\infty$, je nachdem $c_3 > c_2$ oder $c_3 < c_2$ ist. Bezeichnen wir also die beiden zwischen c_1 u. c_2 gelegenen Wurzeln mit g_2 u. g_3, wo $g_2 > g_3$ sei, dann ist:

$$120)\quad c_1 < g_3 < g_2 \begin{matrix} < c_2 \\ < c_3 \end{matrix} \Big\} \text{ je nachdem } \begin{matrix} c_3 > c_2 \\ c_3 < c_2 \end{matrix} \text{ ist.}$$

Bezeichnen wir die dritte Wurzel mit g_1, so ist also:

$$121. \quad \begin{cases} g_1 > g_2 > g_3 \quad \text{und:} \\ R(\xi) = \dfrac{4H}{A(c_2 - c_1)} (\end{cases}$$

Nun könnte ξ an u. für sich in jedem Intervalle liegen, in welchem $R(\xi)$ positiv ist, also zwischen $+\infty$ u. g_1 oder zwischen g_2 u. g_3. Es würde aber auch ξ jedesmal das ganze Intervall durchlaufen müssen, da $\frac{d\xi}{dt}$ stets dasselbe Zeichen hat. Wenn also ξ einmal größer als g_1 wäre, so würde es auch jeden beliebig großen Werth annehmen können, was absurd ist. Mithin muss ξ zwischen g_2 u. g_3 liegen. Wir erhalten daher eine reelle Substitution, wenn wir setzen:

$$122, \quad s = \frac{1}{4}\,\frac{R'(g_3)}{\xi - g_3} + \frac{1}{24}\,R''(g_3)$$

Hiernach entsprechen den Größen $g_1\ g_2\ g_3\ +\infty$ die Größen $e_1\ e_2\ e_3\ \infty$ in einer gewissen Reihenfolge. Da $s = \infty$ ist für $\xi = g_3$, so mögen den Werthen:

$$123, \quad \begin{array}{lllll} \xi = \infty & g_1 & g_2 & g_3 & \text{resp. die Werthe:} \\ s = e_3 & e_2 & e_1 & \infty & \end{array}$$

entsprechen. Dann ist:

$$s - e_3 = \frac{1}{4}\,\frac{R'(g_3)}{\xi - g_3}$$

woraus folgt:

$$124, \quad \begin{aligned} e_1 - e_3 &= \frac{H(g_1 - g_3)}{A(c_2 - c_1)} \\ e_2 - e_3 &= \frac{H(g_2 - g_3)}{A(c_2 - c_1)} \\ e_1 - e_2 &= \frac{H(g_1 - g_2)}{A(c_2 - c_1)} \end{aligned}$$

Da nun $H > 0$, $c_2 - c_1 > 0$ und $g_1 > g_2 > g_3$, so ist:

$$e_1 > e_2 > e_3$$

wie es bei unserer Festsetzung für reelle Größen $e_1\ e_2\ e_3$ ja der

Fall sein muss. Es sind daher in (123) die entsprechenden Werthe richtig angegeben. Wir erhalten also:

$$p(t-t_0) - e_3 = \frac{1}{4}\,\frac{R'(g_3)}{\varphi(t)-g_3},$$

worin t_0 eine reelle Constante bedeutet, welche einen der Momente bezeichnet, in denen $\varphi(t)$ seinen kleinsten Werth g_3 annimmt. Diese Formel benutzen wir jetzt, um die Constanten $t_1\, t_2\, t_3$ zu bestimmen. Dieselbe lässt sich in der Form schreiben:

$$125)\qquad p(t-t_0) - e_3 = \frac{A(c_2-c_1)(e_1-e_3)(e_2-e_3)}{H\,(\varphi(t)-g_3)}$$

Da $\varphi(t)$ für alle reellen Werthe von t zwischen g_2 u. g_3 liegt, so kann der Werth t' von t, für welchen $\varphi(t') = \infty$ wird, nicht reell sein u. zwar ist derselbe, da $p(t'-t_0) = e_3$ ist, gleich: $t' = t_0 + \omega'$. Hiernach erhalten wir aus den Formeln (118) mit Rücksicht auf die allgemeine Gleichung (28) pag. 23, wenn wir darin $A = 0$, $v = t_1, t_2, t_3$, $u_1 = t'$ setzen, durch Integration die Gleichungen:

$$126)\qquad \begin{aligned} \lambda + \mu i &= C_1\,\frac{\sigma(t-t_1)}{\sigma(t-t')}\,e^{\mathfrak{L}_1(t-t_0)i} \\ \nu + \rho i &= C_2\,\frac{\sigma(t-t_2)}{\sigma(t-t')}\,e^{\mathfrak{L}_2(t-t_0)i} \\ p + q i &= C_3\,\frac{\sigma(t-t_3)}{\sigma(t-t')}\,e^{\mathfrak{L}_3(t-t_0)i} \end{aligned}$$

worin zur Abkürzung gesetzt ist:

$$127)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{L}_1 &= \frac{C-A}{2C}(c_2-c_1) + \frac{\sigma'(t_1-t')}{i\sigma(t_1-t')} \\ \mathfrak{L}_2 &= -\frac{C-A}{2C}(c_2-c_1) + \frac{\sigma'(t_2-t')}{i\sigma(t_2-t')} \\ \mathfrak{L}_3 &= -\frac{C-2A}{C}(c_2-c_1) + \frac{\sigma'(t_3-t')}{i\sigma(t_3-t')} \end{aligned}$$

Bezeichnen wir mit $\bar{t}_1$ die zu t_1, mit $\bar{\mathfrak{L}}_1$ die zu $\mathfrak{L}_1$ conjugirte Größe, so ist da $-\omega'$ zu ω' conjugirt ist, wegen (109)

$$\xi - \xi_1 i = C_4 \frac{\sigma(t-\bar{t}_1)\sigma(t-t_2)\sigma(t-t_3)}{\sigma(t-t_0+\omega')\sigma(t-t_0+\omega')\sigma(t-t_0+\omega')} e^{(\mathfrak{L}_2+\mathfrak{L}_3-\bar{\mathfrak{L}}_1)(t-t_0)i}$$

Dieser Ausdruck ist eine doppelt periodische Function, da ξ u. ξ_1 solche sind. Es müssen daher die Null- u. Unendlichkeitsstellen der Function der Bedingung unterliegen:

$$\Sigma(a_\nu - b_\nu) = \bar{t}_1 + t_2 + t_3 - 3t_0 + 3\omega' = 2\nu\omega + 2\nu'\omega'$$

worin ν u. ν' ganze Zahlen sind. Aber diese Null- u. Unendlichkeitsstellen kann man derart um Perioden vermehren, dass $\Sigma(a_\nu - b_\nu) = 0$ wird; alsdann ist der Exponentialfactor gleich 1. Denken wir uns also von vornherein $\bar{t}_1, t_2, t_3$ so gewählt, dass $\bar{t}_1 + t_2 + t_3 - 3t_0 - \omega' = 0$ ist, so ist zugleich:

$$-\bar{\mathfrak{L}}_1 + \mathfrak{L}_2 + \mathfrak{L}_3 = 0$$

Wir brauchen daher nur $\mathfrak{L}_1$ u. $\mathfrak{L}_2$ zu bestimmen, um auch $\mathfrak{L}_3$ zu kennen. Da nun nach unseren Bestimmungen $e_1 > e_2 > e_3$, $c_1 < g_1 < g_2 < c_2$ ist, so zeigt die Gleichung (125), dass $p(t_1-t_0) - e_3$ eine negativ reelle Größe ist, während aus der Gleichung:

$$p'(t-t_0) = -\frac{A(c_2-c_1)(e_1-e_3)(e_2-e_3)}{H(\varphi(t)-g_3)^2}\varphi'(t)$$

hervorgeht, dass $p'(t_1-t_0)$ eine negative rein imaginäre Größe ist. Mithin liegt t_1-t_0 zwischen 0 u. ω' oder es ist:

$$128)\quad t_1 = t_0 + w_1 i \quad , \text{ wo } 0 < w_1 < \frac{\omega'}{i} \text{ ist.}$$

Dieses w_1 ist daher bestimmt durch die Gleichungen:

$$p(w_1 i) = e_3 - \frac{A(c_2-c_1)(e_1-e_3)(e_2-e_3)}{H(g_3-c_1)};$$

$$p'(w_1 i) = -i\,\frac{A(c_2-c_1)^2(e_1-e_3)(e_2-e_3)c_1}{H(g_3-c_1)^2}$$

Da ferner $\varphi(t_2) = c_2$, $\varphi'(t_2) = -c_2(c_2-c_1)i$ ist, so ist $\wp(t_2-t_0)-e_3$ positiv reell u. $\wp'(t_2-t_0)$ positiv u. rein imaginär, folglich liegt t_2-t_0 zwischen ω u. $\omega+\omega'$ oder es ist:

129) $t_2 = t_0 + \omega + w_2 i$, wo $0 < w_2 < \frac{\omega'}{i}$ ist und w_2 durch die Gleichungen bestimmt wird:

$$\wp(w_2 i) = e_1 - \frac{\mathfrak{H}(c_2-g_3)(e_1-e_2)}{\mathfrak{A}(c_2-c_1)(e_2-e_3)-\mathfrak{H}(c_2-g_3)} = e_1 \frac{(c_2-g_3)(e_1-e_2)}{c_2-g_2}$$

$$\wp'(w_2 i) = -i\,\frac{\mathfrak{A}(c_2-c_1)^2(e_1-e_2)(e_2-e_3)c_2}{\mathfrak{H}(c_2-g_2)^2}$$

Nun sollte $\bar{t}_1 + t_2 + t_3 - 3t_0 - \omega' = 0$ sein, mithin wird:

130) $t_3 = t_0 + (w_1 - w_2)i - (\omega - \omega')$

Hiernach gehen nun die Formeln (126) in folgende über:

$$\lambda + \mu i = \bar{C}_1' \frac{\sigma(t-t_0-w_1 i)}{\sigma_3(t-t_0)} e^{l_1(t-t_0)i}$$

131) $$\nu + \rho i = \bar{C}_2 \frac{\sigma_1(t-t_0-w_2 i)}{\sigma_3(t-t_0)} e^{l_2(t-t_0)i}$$

$$p + qi = \bar{C}_3 \frac{\sigma_2(t-t_0-(w_1-w_2)i)}{\sigma_3(t-t_0)} e^{l_3(t-t_0)i}$$

Darin ist:

$$l_1 = \frac{C-\mathfrak{A}}{2C}(c_2-c_1) + \frac{\sigma_3'(w_1 i)}{i\sigma_3(w_1 i)}$$

132) $$l_2 = -\frac{C-\mathfrak{A}}{2C}(c_2-c_1) + \frac{\sigma_2'(w_2 i)}{i\sigma_2(w_2 i)}$$

$$l_3 = \frac{C-2\mathfrak{A}}{C}(c_2-c_1) + \frac{\sigma_1'((w_1-w_2)i)}{i\sigma_1((w_1-w_2)i)}$$

und:

$$\mathfrak{L}_1 = l_1 + \eta' i$$

$$\mathfrak{L}_2 = l_2 + \eta' i - \eta i$$

$$\mathfrak{L}_3 = l_2 + \eta i$$

Da $\mathfrak{L}_1$ reell ist, so ist $\bar{\mathfrak{L}}_1 = \mathfrak{L}_1$, mithin wird wegen

$\mathfrak{L}_2 + \mathfrak{L}_3 - \mathfrak{L}_1 = 0$:

$$l_2 + l_3 - l_1 = 0$$

Diese Formel gibt unmittelbar wegen (116 d):

$$133) \quad r = \frac{\sigma_2'(w_2 i)}{i\,\sigma_2(w_2 i)} + \frac{\sigma_3'(w_1 i)}{i\,\sigma_3(w_1 i)} - \frac{\sigma_1'((w_1 - w_2)i)}{i\,\sigma_1((w_1 - w_2)i)}$$

Die Formeln (131) repräsentiren 6 Gleichungen u. enthalten im Ganzen sechs Integrationsconstanten, nämlich die Grössen $c_1\ c_2\ c_3\ \bar{C}_1\ \bar{C}_2\ \bar{C}_3$. Sollen diese bestimmt sein, so muss der Anfangszustand des Systems gegeben sein d.h. also die Werthe $\lambda_0\ \mu_0\ \nu_0\ \varrho_0\ p_0\ q_0$, welche bez. $\lambda\ \mu\ \nu\ \varrho\ p\ q$ zur Zeit $t = t_0$ besitzen. Indessen können diese Werthe durchaus nicht ganz willkürlich angenommen werden. Da nämlich $\varphi(t_0) = g_3$ ist, so folgt aus den Gleichungen (113):

$$\lambda_0^2 + \mu_0^2 = \frac{g_3 - c_1}{c_2 - c_1}$$

$$134) \quad \nu_0^2 + \varrho_0^2 = \frac{g_3 - c_2}{c_2 - c_1}$$

$$p_0^2 + q_0^2 = \frac{4H(g_3 - c_3)}{A(c_2 - c_1)}$$

und daher:

$$\lambda_0 + \mu_0 i = \sqrt{\frac{g_3 - c_1}{c_2 - c_1}}\, e^{\kappa_1 i}$$

$$135) \quad \nu_0 + \varrho_0 i = \sqrt{\frac{c_2 - g_3}{c_2 - c_1}}\, e^{\kappa_2 i}$$

$$p_0 + q_0 i = \sqrt{\frac{4H(c_3 - g_3)}{A(c_2 - c_1)}}\, e^{\kappa_3 i}$$

$\kappa_1\ \kappa_2\ \kappa_3$ willkürliche Constanten.

Da nun aber:

136) $(\lambda_0 - \mu_0 i)(\nu_0 + \varrho_0 i)(p_0 + q_0 i) = \xi_0 - i\,\xi_0' = g_3$ ist, so wird:

$$\kappa_2 + \kappa_3 - \kappa_1 = 0$$

u. ferner mit Rücksicht auf (131) für $t = t_0$:

$$137)\quad \bar{C}_1' \bar{C}_2 \bar{C}_3 = \frac{g_3}{\sigma(w_1 i)\sigma_1(w_2 i)\sigma_2((w_1 - w_2)i)}$$

worin $\bar{C}_1'$ die zu $\bar{C}_1$ conjugirte Grösse bedeutet. Mithin wird:

$$138)\quad \xi - i\xi_1 = g_3 \frac{\sigma(t - t_0 + w_1 i)\sigma_1(t - t_0 - w_2 i)\sigma_2(t - t_0 - (w_1 - w_2)i)}{\sigma(w_1 i)\sigma_1(w_2 i)\sigma_2((w_1 - w_2)i)\sigma_3^3(t - t_0)}$$

Ob sich die Constanten $c_1 c_2 c_3$ $\bar{C}_1 \bar{C}_2 \bar{C}_3$ mit Hilfe der Constanten w_1 u. w_2 ausdrücken lassen, wie es den Anschein hat, ist mir nicht gelungen, zu beweisen.

Der Fall, wo $r < 0$ ist, lässt sich nach dem Muster des eben behandelten, in welchem $r > 0$ war leicht ausführen.

Anmerkung.

Das allgemeinere Problem, die Bewegung eines Systems materieller Punkte zu bestimmen, welches um einen festen Punkt, der nicht zugleich Schwerpunkt ist, rotirt u. auf welches die Schwerkraft wirkt, ist bis jetzt noch nicht gelöst worden. Man hat vielfach geglaubt, dass die Lösung desselben abhängig sein werde von Abel'schen Functionen d.h. von eindeutigen Functionen mehrerer Variablen, welche ihrerseits wieder lineare Functionen der Zeit sind. In der That kommen in der Theorie der Abel'schen Functionen Differentialgleichungen von der Form vor:

$$\frac{dx_\lambda}{dx} = f_\lambda(x_1 x_2 \dots x_n), \qquad \lambda = 1\ 2 \dots n$$

wo f eine ganze homogene Function zweiten Grades von

$x_1 \dots x_n$ ist, u. die somit eine ganz analoge Form haben, wie die Differentialgleichungen u. . Indessen ist Weierstrass der Ansicht, dass in jener Weise die Lösung des Problems nicht möglich ist, indem er zeigt, dass durch jene Gleichungen die Größen $\lambda \mu \nu \varrho\, p\, q\, r$ im Allgemeinen nicht als eindeutige Functionen von t definirt werden, wie es doch die Natur unsres Problems erfordert, vielmehr müßen, wenn dies der Fall sein soll, zwischen den Coefficienten u. den Anfangswerthen von $\lambda \mu \nu \varrho\, p\, q\, r$ gewiße Relationen bestehen.

Hoppe hat gefunden, dass eine Lösung des Problems möglich sei unter der Voraussetzung, dass der Schwerpunkt stets in der dritten Hauptträgheitsachse liegt u. die Größe q stets gleich 0 ist, die instantane Drehungsachse also stets in der Ebene der ersten u. dritten Trägheitsachse liegt. In der That haben dann die Schlußformeln eine ähnliche Gestalt wie oben. Dieser Fall hat jedoch mechanisch gar keine Bedeutung.

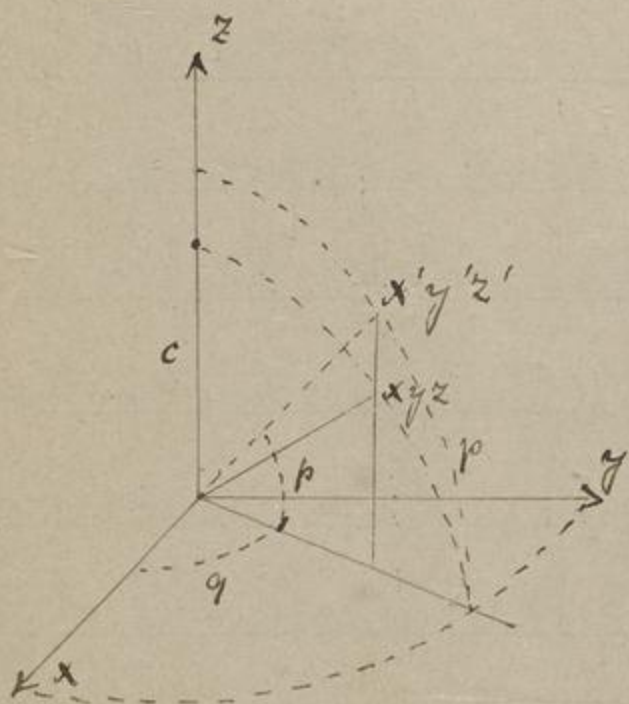
Die geodetische Linie auf dem Rotations-ellipsoid.

Die Gleichung des Rotationsellipsoides sei:

$$1)\quad \frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Dasselbe lässt sich aber auch durch zwei Parameter p u. q wie folgt darstellen:

$$2)\quad \begin{aligned} x &= a \cos p \cos q \\ y &= a \cos p \sin q \\ z &= c \sin p. \end{aligned}$$

Die Bedeutung dieser Grössen $p\, q$ für irgend einen Punkt P des Ellipsoids ist leicht anzugeben. Wir nehmen, um eine bestimmte Vorstellung zu haben an, dass es sich um ein abgeplattetes Rotationsellipsoid also um die Bestimmung eines Punktes auf der Erdoberfläche handle. Dann legen wir das Coordinatensystem so, dass die positive z-Achse nach dem Nordpol gerichtet ist, sodass also die xy-Ebene die Erde im Aequator schneidet. Die dem Aequator parallelen ebenen Schnitte des Erdellipsoids sind Kreise, welche Parallelkreise heissen u. die vom Aequator aus nach Norden hin positiv, nach Süden hin negativ gezählt werden.

Jede durch die beiden Pole gelegte Ebene schneidet die Erde in einer Ellipse, deren beide Hälften, gerechnet von einem Pol zum andern, Meridiane genannt werden. Um diese zu zählen, wählt man denjenigen, welcher durch durch einen belie-

big fixirten Punkt des Aequators, den Anfangspunkt geht, als ersten u. zählt die andern in östlicher Richtung fortschreitend. Dies festgestellt, lege man die positive x-Achse durch den Anfangspunkt des Aequators, so dass also die xz-Ebene den Nullmeridian enthält, u. die positive y-Achse nach der östlichen Seite der xz-Ebene hin. Nun denke man sich um den Nullpunkt der Coordinaten eine Kugel mit dem Radius a gelegt u. durch den Punkt P der Erdoberfläche u. die z-Achse eine Ebene, welche die Erdoberfläche in einer Ellipse, die Kugel in einem Kreise schneidet. Jedem Punkte $P = xyz$ der Ellipse entspricht ein Punkt $P' = x'y'z'$ des Kreises, den man erhält, wenn man die z-Coordinate von P bis zum Durchschnitt mit dem Kreise verlängert. Bezeichnet man nun die geographische Breite u. Länge des Punktes P' gemessen auf der Kugel bez. mit p u. q, so ist:

$$x' = a \cos p \cos q = x$$
$$y' = a \cos p \sin q = y$$
$$z' = a \sin p$$

Da aber $z' : z = a : c$ ist, so ist auch $z = c \sin p$. Es bedeutet daher q die geographische Länge, p die sogenannte reducirte geographische Breite des Punktes P. Hieraus folgt zugleich, dass man vermittelst der Formeln (2) jeden Punkt der Erdoberfläche u. zwar jeden nur einmal erhält, wenn man p die Werthe von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$, beide Grenzen mit eingeschlossen, q dagegen die Werthe von 0 bis 2π, letztere Grenze aber ausgeschlossen, durchlaufen lässt.

Diese Grössen $p\,q$ können wir uns aber auch denken als recht-

winklige Coordinaten in der Ebene. Dadurch wird jedem Punkte innerhalb eines bestimmten Bereiches der Ebene ein Punkt der Oberfläche des Ellipsoids zugeordnet, jeder Linie in der Ebene wird eine ganz bestimmte Linie auf dem Ellipsoid entsprechen. Eine Linie in der Ebene stellen wir mittelst eines Parameters t dar durch Gleichungen von der Form: $p = \varphi(t)$, $q = \psi(t)$. Dabei setzen wir fest, dass die Curve von ihrem Anfangspunkt bis zu ihrem Endpunkt durchlaufen werden solle, wenn wir t von t_0 bis t_1 gehen lassen, u. ferner, dass zu einem grösseren Werthe von t ein späterer Punkt der Curve gehören solle. Dieser Curve in der Ebene entspricht eine bestimmte Curve auf dem Ellipsoid. Die Länge derselben zwischen zwei Punkten $x_1 y_1 z_1$ u. $x_2 y_2 z_2$, welche resp. zu den Werthen t_1 u. t_2 von t gehören ist:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

Nun ist aber:

$$3)\quad \begin{aligned} dx &= -a \sin p \cos q\, dp - a \cos p \sin q\, dp \\ dy &= -a \sin p \sin q\, dp + a \cos p \cos q\, dp \\ dz &= c \cos p\, dp \end{aligned}$$

Also:

$$4)\quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = P dp^2 + Q dq^2, \qquad \text{worin}$$

$$5)\quad \begin{aligned} P &= a^2 \sin^2 p + c^2 \cos^2 p \\ Q &= a^2 \cos^2 p \end{aligned}$$

ist. Folglich wird jetzt, wenn wir $\frac{dp}{dt} = p'$, $\frac{dq}{dt} = q'$ setzen:

$$6)\quad s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{P p'^2 + Q q'^2}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} F(p, q, p', q')\, dt.$$

Damit nun dieses Integral ein Minimum sei, ist erforder-

lich, 1) dass die Function F den Differentialgleichungen genüge:

$$7) \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial p'} - \frac{\partial F}{\partial p} = 0 \quad , \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial q'} - \frac{\partial F}{\partial q} = 0$$

2, dass sich $\frac{\partial F}{\partial p'}$ u. $\frac{\partial F}{\partial q'}$ längs der ganzen Strecke stetig ändern u.

3, dass die Größe F_1, welche definirt wird durch eine der Gleichungen:

$$F_1 = \frac{1}{q'^2}\frac{\partial^2 F}{\partial p'^2} = -\frac{1}{p'q'}\frac{\partial^2 F}{\partial p'\partial q'} = \frac{1}{p'^2}\frac{\partial^2 F}{\partial q'^2}$$

beständig positiv u. von 0 u. ∞ verschieden sei. Nun ist:

$$\frac{\partial F}{\partial p'} = \frac{Pp'}{F} \, , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial p'\partial q'} = -\frac{PQp'q'}{F^3} \, , \quad \text{also:}$$

$$8) \quad F_1 = \frac{P.Q}{F^3}$$

Dies ist eine wesentlich positive Größe, da $P\,Q\,F$ solche sind, letztere deshalb, weil wir angenommen haben, dass mit wachsendem t auch s wachsen solle, u. daher $\frac{ds}{dt}$ positiv sein muss. Ferner könnte F_1 nur dann unendlich groß werden, wenn $F=0$ d.h. also $p'=q'=0$ wäre, was bei einem Ellipsoid, das keine singulären Punkte besitzt, nicht der Fall sein kann. Daraus folgt zugleich, dass auch die zweite Bedingung erfüllt ist, u. ferner, dass man in der Ebene für jede beliebige Anfangsrichtung eine Curve finden kann, welche der Differentialgleichung (7) genügt. Dieser entspricht auf dem Ellipsoid die geodetische Linie, für welche eine Anfangsrichtung ebenfalls beliebig festgesetzt werden kann. Aus der 2^t. Gleichung (7) folgt, da in F q selbst nicht vorkommt:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial q'} = 0 \qquad \text{d. i.}$$

$$\frac{\partial F}{\partial q'} = k$$

wo K eine wirkliche Constante u. für die ganze Strecke dieselbe ist, wie aus der Stetigkeit der Größe $\frac{\partial F}{\partial q'}$ unmittelbar hervorgeht. Diese Gleichung ist identisch mit der folgenden:

$$\frac{a^2\cos^2 p\, q'}{\sqrt{(a^2\sin^2 p + c^2\cos^2 p)\, p'^2 + a^2\cos^2 p\, q'^2}} = K \,, \quad \text{oder:}$$

$$dq^2 = \frac{K^2(a^2\sin^2 p + c^2\cos^2 p)}{a^4\cos^4 p - K^2 a^2\cos^2 p}\, dp^2 .$$

Führen wir die numerische Excentricität des Ellipsoids ein, so ist:

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2} \,, \qquad 0 < \varepsilon < 1 .$$

also:

$$9) \quad dq^2 = \frac{K^2(1 - \varepsilon^2\cos^2 p)}{\cos^2 p\,(a^2\cos^2 p - K^2)}\, dp^2$$

u. somit:

$$10) \quad ds = \frac{a^2\cos p\,(1 - \varepsilon^2\cos^2 p)}{\sqrt{(a^2\cos^2 p - K^2)(1 - \varepsilon^2\cos^2 p)}}\, dp .$$

Welcher Werth hierin der Quadratwurzel beizulegen ist ergibt sich leicht, wenn wir an Stelle von $\cos p\, dp$ setzen $\frac{dz}{c}$. Es wird somit, da $1 - \varepsilon^2\cos^2 p > 0$ ist, die Quadratwurzel positiv oder negativ zu nehmen sein, je nachdem z mit wachsendem s zu- oder abnimmt. Um dies in jedem Falle entscheiden zu können, hat man einen bestimmten Punkt der Curve auf dem Ellipsoid als Anfangspunkt, ferner in diesem für die Curve eine bestimmte Anfangsrichtung festzusetzen u. sodann den Bogen vom Anfangspunkte aus in der gegebenen Anfangsrichtung als positiv, in der entgegengesetzten als negativ zu rechnen. Führt man in vorstehende Formel z ein durch die Gleichung (2):

$$1 - \frac{z^2}{c^2} = \cos^2 p$$

so wird:

$$11)\quad ds = \frac{a^2}{c}\,\frac{\left(1-\varepsilon^2+\frac{\varepsilon^2 z^2}{c^2}\right)dz}{\sqrt{Z}}$$

worin:

$$12)\quad Z = \left(a^2-\kappa^2-\frac{a^2 z^2}{c^2}\right)\left(1-\varepsilon^2+\frac{\varepsilon^2 z^2}{c^2}\right)$$

ist. Aus der Gleichung (11) ist nun z als Function von s zu bestimmen. Aus dieser Gleichung folgt aber auf Grund der allgemeinen Bemerkungen pag. 56 etc. unmittelbar, dass z eine reellperiodische Function von s ist. Für alle reellen Werthe, welche z überhaupt annehmen kann ... u. diese liegen zwischen $-c$ u. $+c$ ... verschwindet nämlich die Function Z nur an den beiden Stellen $\pm z_0 = \frac{c}{a}\sqrt{a^2-\kappa^2}$. Diese Werthe sind wirklich reell u. zwischen $-c$ u. $+c$ enthalten, da, wie aus (9) hervorgeht, $a^2\cos^2 p-\kappa^2>0$ also auch $a>\kappa$ ist. Schreiben wir somit unsre Gleichung (11) in der Form:

$$\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = -\frac{1}{a^2}(z-z_0)(z+z_0)\,\frac{1}{1-\varepsilon^2+\frac{\varepsilon^2 z^2}{c^2}}$$

$$= (z_0-z)(z_0+z)\,f(z)$$

so ist $f(z)$ eine Function, welche in dem Intervalle $-z_0 \,..\, +z_0$ beständig positiv ist u. in den Grenzen selbst nicht verschwindet. Mithin wird nach pag. 56 durch obige Gleichung in der That z als reellperiodische stets endlich bleibende Function der unbeschränkt veränderlichen reellen Größe s definirt, welche beständig zwischen den Grenzen $-z_0$ u. $+z_0$ liegt u. diese Grenzen selbst unendlich oft erreicht. – Hierdurch gewinnen wir bereits eine deutliche Vorstellung von dem Verlaufe der geodetischen Linie auf dem Erdellipsoid. Alle Punkte nämlich, für welche z denselben

Werth hat, liegen auf einem Parallelkreise. Mithin läuft die geodetische Linie beständig zwischen zwei symetrisch zum Aequator gelegenen Parallelkreisen hin u. her u. berührt dieselben. Diese Berührungspunkte bleiben aber nicht dieselben, sondern folgen, wie wir sehen werden, für die einzelnen Umläufe in gleichem Abstande aufeinander. Diese Vorstellung wird aber noch klarer, wenn wir auf die geometrische Bedeutung der Constanten k etwas näher eingehen. Eine Definition von k kann unmittelbar aus der Gleichung:

$$z_0 = \frac{c}{a}\sqrt{a^2-k^2}$$

abgeleitet werden. Nennen wir p_0 die reducirte Breite des Parallelkreises $z = z_0$, so ist $z_0 = c \sin p_0$, u. somit wird:

$$13) \quad k = a \cos p_0$$

Es ist daher k die x-Coordinate des Punktes, in welchem der Parallelkreis $z = z_0$ die xz-Ebene schneidet. Man kann aber k noch anders definiren. Die geodetische Linie auf der Erde ist erst dann bestimmt, sobald außer der geographischen Länge u. Breite des Punktes, von welchem sie ausgeht, noch ihr Azimut σ oder ihre Anfangsrichtung gegeben ist, d. h. der Winkel, welchen der nach Norden gerichtete Theil des Meridians mit der Anfangsrichtung der geodetischen Linie bildet. Dabei ist zu beachten, dass dieser Winkel vom Meridian aus nach Osten hin gerechnet wird, so dass σ zwischen 0 u. 2π liegen kann. Diesen Winkel kann man nun leicht aus p q u. k berechnen. Es sind nämlich die Richtungscosinusse

des Meridianelementes im Punkte pq, da für den Meridian $q = const$ ist, resp:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)_{q=const} = -a \sin p \cos q \left(\frac{dp}{ds}\right)_{q=c_0} = \frac{-a \sin p \cos q}{\sqrt{a^2 \sin^2 p + c^2 \cos^2 q}}$$

$$\left(\frac{dy}{ds}\right)_{q=const} = -a \sin p \sin q \left(\frac{dp}{ds}\right)_{q=const} = \frac{-a \sin p \sin q}{\sqrt{a^2 \sin^2 p + c^2 \cos^2 q}}$$

$$\left(\frac{dz}{ds}\right)_{q=const} = c \cos p \left(\frac{dp}{ds}\right)_{q=const} = \frac{c \cos p}{\sqrt{a^2 \sin^2 p + c^2 \cos^2 q}}$$

Die Richtungscosinusse des Elementes der geodetischen Linie im Punkte pq sind $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ u. ihre Werthe werden gefunden, indem man die Gleichungen (3) durch ds dividirt. Multiplicirt man nun vorstehende Gleichungen resp. mit $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}$ $\frac{dz}{ds}$ u. addirt sie dann, so wird schließlich:

$$14, \quad \cos \sigma = a \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 p} \; \frac{dp}{ds}$$

Setzt man hierin für $\frac{dp}{ds}$ seinen Werth aus (10) so erhält man nach leichter Umformung die Formel:

$$15, \quad \kappa = a \cos p \sin \sigma.$$

Vergleicht man hiermit den früheren Werth von κ:

$$\kappa = a \cos p_0$$

so ergibt sich hieraus, dass für $p = p_0$ $\sin \sigma = 1$ also $\sigma = \frac{\pi}{2}$ ist d.h. die geodetische Linie schneidet unter der Breite $p = p_0$ den Meridian rechtwinklig u. hierdurch wird bewiesen, dass die geodetische Linie den Parallelkreis $z = z_0$ berührt.

Wir wollen hier gleich noch eine Formel ableiten, die wir später brauchen werden u. die die wahre Breite φ eines Ortes aus seiner reducirten finden lehrt. Unter der wahren Breite eines

Ortes versteht man den Winkel, welchen die Normale der Fläche in jenem Punkte mit der Ebene des Aequators bildet, folglich ist:

$$16) \quad \sin\psi = \frac{a \sin p}{\sqrt{a^2\sin^2 p + c^2\cos^2 p}}, \quad \cos\psi = \frac{c\cos p}{\sqrt{a^2\sin^2 p + c^2\cos^2 p}}$$

mithin:

$$17) \quad tg\,\psi = \frac{a}{c}\, tg\,p = \frac{tg\,p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

Wir gehen nunmehr wieder zu der Formel für z zurück. Es war:

$$ds = \frac{a^2}{c}\,\frac{\left(1-\varepsilon^2+\frac{\varepsilon^2 z^2}{c^2}\right)dz}{\sqrt{Z}}$$

Wir wollen jedoch nicht s als Parameter behalten, sondern eine neue Größe einführen mittelst der Gleichung:

$$18) \quad du = \frac{dz}{\sqrt{Z}}$$

Durch dieselbe wird z als elliptische Function von u definirt, wir setzen dabei fest, dass für $u=0$ z seinen größten Werth z_0 annehmen solle. Denken wir uns ferner den Nullpunkt von s in einen derjenigen Punkte gelegt, für welchen $z=z_0$ ist, so können wir, da:

$$\frac{du}{ds} = \frac{c}{a^2}\,\frac{1}{1-\varepsilon^2+\frac{\varepsilon^2 z^2}{c^2}}$$

positiv ist, also u mit s wächst, den Nullpunkt von u in den von s verlegen, u. es wird dann u gleichzeitig mit s wachsen u. abnehmen. Wird $s=+\infty$, so wird auch $u=+\infty$. Überhaupt entspricht jedem Werthe von s zwischen $-\infty$ u. $+\infty$ ein bestimmter Werth von u zwischen $-\infty$ u. $+\infty$ u. umgekehrt. Mithin ist z, welches eine stetige Function von s ist, auch eine stetige Function von u von der Beschaffenheit, dass wenn u alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, z alle Werthe von $-z_0$ bis $+z_0$ annimmt.

Ist z als eindeutige Function von u bestimmt, so kann man auch leicht x u. y berechnen. Es ist nämlich:

$$x + yi = a \cos p \, e^{qi}, \quad \text{also:}$$

$$d \log(x+yi) = - \frac{\sin p}{\cos p} dp + i\, dq$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d(z^2)}{z^2 - c^2} + i\kappa c \frac{\left(1 - \varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^2 z^2}{c^2}\right) dz}{(c^2 - z^2)\sqrt{Z}}$$

oder:

$$d \log(x+yi = \frac{1}{2} \frac{d(z^2)}{z^2 - c^2} - \frac{i\kappa c\, du}{z^2 - c^2} - \frac{i\kappa\varepsilon^2}{c} du.$$

Folglich erhalten wir zur Bestimmung von z x y als Functionen von u die beiden Gleichungen:

$$19, \quad \left(\frac{dz}{du}\right)^2 = Z$$

$$\frac{d \log(x+yi)}{du} = \frac{1}{2} \frac{\frac{d(z^2)}{du} - 2i\kappa c}{z^2 - c^2} - \frac{i\kappa\varepsilon^2}{c}$$

Durch die erste Gleichung wird Z u. somit auch z^2 als elliptische Function von u definirt. Setzen wir nämlich:

$$20, \quad z^2 = \xi = \varphi(u),$$

so wird:

$$\left(\frac{d\xi}{du}\right)^2 = 4z^2 \left(\frac{dz}{du}\right)^2 = 4z^2 Z \quad \text{mithin:}$$

$$21, \quad \left(\frac{d\xi}{du}\right)^2 = 4\xi\left(a^2 - \kappa^2 - \frac{a^2\xi}{c^2}\right)\left(1 - \varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^2\xi}{c^2}\right) = R(\xi).$$

Da z, wie wir gesehen, beständig zwischen den Grenzen $-\frac{c}{a}\sqrt{a^2-\kappa^2}$ u. $+\frac{c}{a}\sqrt{a^2-\kappa^2}$ liegt, so liegt ξ beständig zwischen den Grenzen 0 u. $\frac{c^2}{a^2}(a^2-\kappa^2)$ oder, was dasselbe, zwischen 0 u. $c^2 \sin^2 p_0$; es ist also beständig kleiner als c^2 u. erreicht die Grenze c^2 nur dann, wenn $p_0 = \frac{\pi}{2}$ ist, was nur in dem Falle eintritt, wo die geodetische Linie mit dem Meridian zusammenfällt. Zur Lösung dieser Differentialgleichung schlagen wir einen bereits pag. 12 u. f. angedeuteten Weg ein. Ist nämlich die Differentialgleichung vorgelegt:

$$\varphi'^2(u) = 4B\varphi^3(u) + 6C\varphi^2(u) + 4B'\varphi(u) + A'$$

so ergibt sich das Integral derselben aus der Formel:

$$p(u-u') = B\varphi(u) + \tfrac{1}{2}C,$$

wo u' einen der Werthe von u bedeutet, für den $\varphi(u) = \infty$ wird.

Setzt man $p(u-u') = s$, $\varphi(u) = x$, so wird:

$$22) \quad s = Bx + \tfrac{1}{2}C.$$

Hieraus folgt:

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = B^2\left(\frac{dx}{du}\right)^2 \qquad \text{oder:}$$

$$4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3) = B^2 R(x)$$

d. h. diejenigen Werthe von x, welche den Werthen $e_1 e_2 e_3$ von s entsprechen, sind Wurzeln der Gleichung $R(x) = 0$. Ferner folgt aus (22), dass wenn die Wurzeln dieser Gleichung reell sind, auch die Grössen e sämmtlich reell sind. Sind daher die Wurzeln der Gleichung $R(x) = 0$ in der Ordnung, in welcher sie den drei Grössen $e_1 e_2 e_3$ entsprechen resp $a_1 a_2 a_3$, so folgt aus (22):

$$23) \quad \begin{aligned} s - e_1 &= B(x - a_1) \\ s - e_2 &= B(x - a_2) \\ s - e_3 &= B(x - a_3) \end{aligned}$$

u. somit:

$$24) \quad \begin{aligned} e_1 - e_2 &= B(a_1 - a_2) \\ e_2 - e_3 &= B(a_2 - a_3) \\ e_1 - e_3 &= B(a_1 - a_3) \end{aligned}$$

Werden die Grössen e wie gewöhnlich in der Reihenfolge $e_1 > e_2 > e_3$ genommen, so sind die Grössen a entweder in der Ordnung $a_1 > a_2 > a_3$ oder in der folgenden: $a_3 > a_2 > a_1$ zu nehmen, je nachdem B positiv oder negativ ist. —

In unserm Falle ist nun B negativ, denn es ist $B = -\frac{a^2\varepsilon^2}{c^4}$

Folglich ist die größte Wurzel von $R(\xi)=0$ mit a_3, die kleinste mit a_1 zu bezeichnen. Mithin ergibt sich:

$$25) \quad \begin{aligned} a_1 &= -\frac{c^2}{\varepsilon^2}(1-\varepsilon^2) \\ a_2 &= 0 \\ a_3 &= \frac{c^2}{a_2}(a^2-k^2) = c^2 \sin^2 p_0 \end{aligned}$$

u. hieraus:

$$26) \quad \begin{aligned} e_1 - e_2 &= 1 \\ e_2 - e_3 &= \frac{a^2\varepsilon^2}{c^2}\sin^2 p_0 \\ e_1 - e_3 &= \frac{a^2}{c^2}(1-\varepsilon^2\cos^2 p_0) \end{aligned}$$

Für ξ selbst erhalten wir aus (22) die Gleichungen:

$$27) \quad \begin{aligned} p(u-u') - e_1 &= -\frac{a^2\varepsilon^2}{c^4}\xi - 1 \\ p(u-u') - e_2 &= -\frac{a^2\varepsilon^2}{c^4}\xi \\ p(u-u') - e_3 &= -\frac{a^2\varepsilon^2}{c^4}\xi + \frac{a^2\varepsilon^2}{c^2}\sin^2 p_0 . \end{aligned}$$

Da ξ für reelle Werthe von u niemals unendlich groß werden kann, so kann u' nicht reell sein; ferner folgt aber aus den letzten beiden Gleichungen, da $0 < \xi < c^2 \sin^2 p_0$ ist, dass der Werth von $p(u-u')$ zwischen e_2 u. e_3 liegt. Daraus geht aber hervor, dass u' stets auf die Form gebracht werden kann: $u' = u_0 + \omega'$, wo u_0 eine reelle Größe ist. Somit ergibt sich aus der letzten Gleichung:

$$-e_3 + p(u-u_0-\omega') = -\frac{a^2\varepsilon^2}{c^4}(\xi - c^2\sin^2 p_0)$$

Nun ist aber:

$$28) \quad p(u-u_0-\omega') - e_3 = \frac{(e_1-e_3)(e_2-e_3)}{p(u-u_0)-e_3} = \frac{(e_1-e_3)(e_2-e_3)\sigma^2(u-u_0)}{\sigma_3^2(u-u_0)}$$

Folglich erhalten wir:

$$29) \quad \frac{\xi}{c^2} = \sin^2 p_0 - \frac{c^2}{a^2\varepsilon^2}(e_1-e_3)(e_2-e_3)\frac{\sigma^2(u-u_0)}{\sigma_3^2(u-u_0)}$$

Auf dieselbe Gleichung kommt man mit Hilfe der beiden ersten Gleichungen (27), wie man ohne Weiteres einsieht. Sie ist einer sehr wesentlichen Vereinfachung fähig, wie wir weiter unten zeigen werden.

Wir behandeln jetzt zunächst die 2te Gleichung (19) weiter. Dieselbe ist:

$$\frac{d\log(x+yi)}{du} = -\frac{iK\varepsilon^2}{c} + \frac{1}{2}\,\frac{\frac{d\xi}{du} - 2iKc}{\xi - c^2}$$

$$= -\frac{iK\varepsilon^2}{c} + \frac{1}{2}\,\frac{\varphi'(u) - 2iKc}{\varphi(u) - c^2}$$

Man kann nun stets ein Argument u_1 so bestimmen, dass für dasselbe:

$$30) \quad \varphi(u_1) = c^2 \quad u. \quad \varphi'(u_1) = -2iKc$$

ist. In der That ist für $u = u_1$ d.h. für $\varphi(u) = c^2$ nach (21)

$$\varphi'^2(u) = -4c^2K^2, \quad \text{also} \quad \varphi'(u) = \pm 2iKc$$

Ist dieses geschehen, so wird:

$$\frac{d\log(x+yi)}{du} = -\frac{iK\varepsilon^2}{c} + \frac{1}{2}\,\frac{\varphi'(u)+\varphi'(u_1)}{\varphi(u)-\varphi(u_1)}$$

also durch Integration:

$$31) \quad x+yi = C\,\frac{\sigma(u-u_1)}{\sigma(u-u')}\,e^{\left(-\frac{iK\varepsilon^2}{c} + \frac{\sigma'(u_1-u')}{\sigma(u_1-u')}\right)(u-u_0)}$$

worin C eine Integrationsconstante ist. Wir haben zunächst die Größe u_1 näher zu bestimmen. Da für $u = u_1$ $\xi = c^2$ u. $\frac{d\xi}{du} = -2iKc$ wird, so folgt aus der 3ten Gleichung (27):

$$32) \quad p(u_1-u') - e_3 = -\frac{K^2\varepsilon^2}{c^2} \quad u.$$

$$p'(u_1-u') = i \cdot \frac{2a^2\varepsilon^2K}{c^3}$$

d.h. es für $u = u_1$ der Werth von $p(u-u')$ negativ u. der Werth der Ableitung eine positive rein imaginäre Größe. Folglich liegt $u_1 - u'$ zwischen 0 u. $-\omega'$ oder es ist:

$u_1 - u' = -w'i$, worin w' reell ist u. zwischen 0 u. $\frac{\omega'}{i}$ liegt, also

$u_1 = u' - w'i = u_0 + \omega' - w'i = u_0 + wi$, worin w eine positive reelle Größe ist. Setzen wir dies in (32) ein, so ergibt sich zur Bestimmung von w die Gleichung:

$$p(wi - \omega') - e_3 = -\frac{\kappa^2 \varepsilon^2}{c^2}$$, oder noch

$$1, \quad p(wi) - e_3 = -\frac{c^2(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)}{\kappa^2 \varepsilon^2}$$, woraus noch folgt

$$33, \quad 2, \quad p(wi) - e_2 = -\left(1 + \frac{c^2}{\kappa^2\varepsilon^2}(e_1 - e_3)\right)(e_2 - e_3)$$

$$3, \quad p(wi) - e_1 = -\left(1 + \frac{c^2}{\kappa^2\varepsilon^2}(e_2 - e_3)\right)(e_1 - e_3)$$

Dividirt man die letzte dieser Gleichungen durch die erste, so findet man mit Benutzung der Formeln (26) u. der Formel $pu - e_\lambda = \left(\frac{\sigma_\lambda u}{\sigma u}\right)^2$:

$$\frac{\sigma_1^2(wi)}{\sigma_3^2(wi)} = \frac{1}{\sin^2 p_0} \quad ;$$

hieraus folgt, da $\frac{\sigma_1}{\sigma_3}$ für den angegebenen Werth von w positiv sein muss:

$$1) \quad \frac{\sigma_1(wi)}{\sigma_3(wi)} = \frac{1}{\sin p_0}$$ Analog findet man noch:

$$34, \quad 2, \quad \frac{\sigma_2(wi)}{\sigma_3(wi)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 p_0}}$$ u. endlich aus (33^{I})

$$3, \quad \frac{\sigma(wi)}{\sigma_3(wi)} = i \operatorname{ctg} p_0 \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2\cos^2 p_0}}$$

Die Gleichung (34^{I}) ist am bequemsten zur Berechnung von w; umgekehrt kann dieselbe dazu dienen, die Constante p_0 durch w zu ersetzen. Setzen wir jetzt in Gleichung (29) für $\frac{c^2}{a^2\varepsilon^2}(e_2 - e_3)$ aus (26) seinen Werth, so wird:

$$\frac{\xi}{c^2} = \sin^2 p_0 \left(1 - (e_1 - e_3)\frac{\sigma^2(u-u_0)}{\sigma_3^2(u-u_0)}\right)$$

Wendet man nun hierauf die allgemeine Formel:

$$\sigma_\alpha^2 u - \sigma_\beta^2 u + (e_\alpha - e_\beta)\sigma^2 u = 0$$

an, so findet man einfach:

$$\frac{\xi}{c^2} = \sin^2 p_0 \frac{\sigma_1^2(u-u_0)}{\sigma_3^2(u-u_0)}$$, also

$$35, \quad z = c \sin p_0 \frac{\sigma_1(u-u_0)}{\sigma_3(u-u_0)} = c\,\frac{\sigma_3(wi)\,\sigma_1(u-u_0)}{\sigma_1(wi)\,\sigma_3(u-u_0)}$$

Führt man in (31) für u, die Größe wi ein, so erhält man:

$$x + yi = C_1 \frac{\sigma(wi - u + u_0)}{\sigma_3(u-u_0)}\, e^{i\left(-\frac{\kappa\varepsilon^2}{c} + \frac{\sigma_3'(wi)}{i\sigma_3(wi)}\right)(u-u_0)}$$

Nun möge für $u = u_0$ $x = x_0$, $y = y_0$ sein; dann ist:

$$x_0 + y_0 i = a\cos p_0\, e^{\varphi_0 i} = C_1\, \sigma(wi) \qquad \text{also:}$$

$$C_1 = \frac{a\cos p_0}{\sigma(wi)}\, e^{\varphi_0 i}$$

Nach ($34^{2\,u.\,3}$) folgt aber:

$$i\cos p_0\sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{\sigma(wi)}{\sigma_2(wi)}\sin p_0\,, \quad \text{also} \quad a\cos p_0 = \frac{a\sin p_0}{i\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,\frac{\sigma(wi)}{\sigma_2(wi)}$$

$$a\cos p_0 = \frac{a^2}{c}\,\frac{\sigma(wi)}{i\sigma_2(wi)}\,\frac{\sigma_3(wi)}{\sigma_1(wi)}\,, \quad \text{also:}$$

$$C_1 = \frac{a^2\sigma_3(wi)}{ic\,\sigma_1(wi)\sigma_2(wi)}\, e^{\varphi_0 i}$$

Mithin wird der Ausdruck für $x + yi$:

$$36)\quad x + yi = \frac{a^2}{c}\,\frac{\sigma_3(wi)\sigma(wi-u+u_0)}{i\sigma_1(wi)\sigma_2(wi)\sigma_3(u-u_0)}\, e^{i\left\{\varphi_0 + \left[-\frac{\kappa\varepsilon^2}{c} + \frac{\sigma_3'(wi)}{i\sigma_3(wi)}\right](u-u_0)\right\}}$$

Durch die Formeln (35) u. (36) werden nun die Coordinaten $x\ y\ z$ eines Punktes der geodätischen Linie als Functionen derselben Größe u ausgedrückt. Wie bereits oben bemerkt, kann man den Anfangspunkt der Curve in einen der Punkte legen, in welchem die Curve den nördlichen Parallelkreis berührt. Man kann dann auch den Nullpunkt von u in diesen Punkt verlegen u. somit $u_0 = 0$ setzen. Thun wir dies, so wird:

$$z = c\sin p_0\,\frac{\sigma_1 u}{\sigma_3 u} = c\,\frac{\sigma_3(wi)\sigma_1(u)}{\sigma_1(wi)\sigma_3(u)}$$

$$37)\quad x + iy = \frac{a^2}{c}\,\frac{\sigma_3(wi)\sigma(wi-u)}{i\sigma_1(wi)\sigma_2(wi)\sigma_3 u}\, e^{i\left\{\varphi_0 + u\left[-\frac{\kappa\varepsilon^2}{c} + \frac{\sigma_3'(wi)}{\sigma_3(wi)}\right]\right\}}$$

Statt der Coordinaten braucht man in der Geodesie fast nur die Länge u. Breite eines Punktes der geodätischen Linie. Dieselben erhalten wir aus vorstehenden Gleichungen sehr einfach

mit Hilfe der Gleichungen (2). Es folgt:

$$38)\quad \begin{aligned} \sin p &= \sin p_0 \frac{\sigma_1(u)}{\sigma_3(u)} \\ \cos p\, e^{gi} &= \cos p_0 \frac{\sigma(wi-u)}{\sigma(wi)\sigma_3 u}\, e^{i\left\{g_0 + u\left[-\frac{\kappa\varepsilon^2}{c} + \frac{\sigma_3'(wi)}{\sigma_3(wi)}\right]\right\}} \end{aligned}$$

Ganz ähnliche Ausdrücke findet man für die wahre Breite ψ eines Punktes der geodetischen Linie. Man braucht sich dazu nur an die Formeln (16) zu erinnern, auf Grund deren aus den vorstehenden die folgenden Gleichungen abgeleitet werden:

$$39)\quad \begin{aligned} \sin \psi &= \sin \psi_0 \frac{\sigma_1(u)}{\sigma_2(u)} = \frac{\sigma_2(wi)\sigma_1(u)}{\sigma_1(wi)\sigma_2(u)} \\ \cos \psi\, e^{gi} &= \cos \psi_0 \frac{\sigma(wi-u)}{\sigma(wi)\sigma_2 u}\, e^{i\left\{g_0 + u\left[-\frac{\kappa\varepsilon^2}{c} + \frac{\sigma_3'(wi)}{\sigma_3(wi)}\right]\right\}} \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Formel (11) lässt sich auch leicht der Bogen s der geodetischen Linie als Function von u ausdrücken. Wir nehmen dabei an, dass für $u=0$ auch $s=0$ sei. Es lässt sich zunächst Gleichung (11) auf die Form bringen:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{c} &= \left(1 + (e_2-e_3)\frac{\sigma_1^2 u}{\sigma_3^2 u}\right) du \\ &= \left(1 + (e_2-e_3)\frac{\wp u - e_1}{\wp u - e_3}\right) du \\ &= (e_1-e_2)\,du - \frac{(e_1-e_3)(e_2-e_3)}{\wp u - e_3}\,du \\ &= e_1\,du - \wp(u+\omega')\,du \end{aligned}$$

also wenn wir zwischen 0 u. u integriren:

$$\begin{aligned} \frac{s}{c} &= e_1 u - \int_0^u \wp(u+\omega')\,du \\ &= e_1 u - \int_{\omega'}^{u+\omega'} \wp u\,du \end{aligned}$$

Mithin:

$$40).\quad s = c\left(e_1 u + \frac{\sigma_3' u}{\sigma_3 u}\right)$$

Betrachten wir nun die Gleichungen (38) u. (40), so ist $\sin\varphi$ eine periodische Function mit der reellen Periode 4ω, q und s aber nicht, vielmehr ändern sich diese jedesmal um eine bestimmte constante Größe. Hieraus folgt, dass die geodätische Linie in ihrer unbegrenzten Ausdehnung genommen einen u. denselben Parallelkreis unendlich oft durchschneidet, aber so, dass die Schnittpunkte in gleichem Abstande aufeinander folgen. Die Bogenlänge der geodätischen Linie zwischen zwei solchen aufeinander folgenden Schnittpunkten ist stets dieselbe. Was von diesen Schnittpunkten gilt, gilt auch für die Berührungspunkte mit dem nördlichsten resp. südlichsten Parallelkreis, womit die Bemerkung pag. 144 bestätigt wird. Die geodätische Linie schliesst sich im Allgemeinen nicht d.h. sie kehrt im Allgemeinen zu demselben Punkte nicht wieder zurück; sie wird mithin das Ellipsoid vollständig umspinnen, indessen kann man nicht behaupten, dass ein beliebiger Punkt desselben von jeder beliebigen geodätischen Linie wirklich erreicht wird, obwohl man ihm stets unendlich nahe kommen kann. – Daraus folgt aber, dass sich zwei von demselben Punkte ausgehende geodätischen Linien einmal schneiden müssen. Der erste Schnittpunkt ist der zum Ausgangspunkte conjugirte Punkt, bis zu welchem hin der Bogen der geodätischen Linie wirklich die kürzeste Länge hat, wie in der Variationsrechnung gezeigt ist.

Entwicklung der elliptischen Functionen in Fourier'sche Reihen.

In den durchgeführten Beispielen setzten sich die Schlußformeln stets aus Factoren von folgender Gestalt zusammen:

$$\frac{\sigma(u-v_1)}{\sigma(u-v_2)}\, e^{gu+g'}$$

worin g u. g' Constanten u. $v_1\, v_2$ theils rein imaginäre constante Größen, theils Perioden waren. Ferner bedeutete u stets eine reelle Größe. Drückt man vorstehenden Ausdruck durch ϑ-Functionen aus, so nimmt er die Form an:

$$\frac{\vartheta\left(\frac{u-v_1}{2\omega}\right)}{\vartheta\left(\frac{u-v_2}{2\omega}\right)}\, e^{g_1u+g_1'}$$

u. in dieser erkennt man leicht, dass er abgesehen von dem Exponentialfactor eine periodische Function mit der reellen Periode 2ω darstellt. Ein solcher Quotient von ϑ-Functionen läßt sich nun innerhalb eines Bereiches, in welchem er nicht unendlich groß wird, in eine Fourier'sche Reihe oder in eine Reihe von der Form:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} A_\nu\, e^{\frac{\nu u\pi i}{2\omega}}$$

entwickeln. Obwohl die ϑ-Reihen so stark convergiren, dass man bei den meisten practischen Anwendungen mit den beiden ersten Gliedern ausreicht, so ist eine derartige Entwicklung der Quotienten in eine Fourier'sche Reihe, obwohl im Allgemeinen weniger stark convergent, für viele Zwecke doch angemessener, weshalb wir im Folgenden die allgemeine Theorie dieser Entwicklungen geben wollen.

Es sei gegeben die Function:

$$\varphi_1(u) = \frac{\sigma(u-a_1)\,\sigma(u-a_2)\ldots\sigma(u-a_r)}{\sigma(u-b_1)\,\sigma(u-b_2)\ldots\sigma(u-b_r)}\, e^{gu+g'}$$

Dieselbe ist eine doppelt-periodische Function, sobald $\sum_1^r a_1 = \sum_1^r b_1$ ist. Setzen wir voraus, dass der Nenner für reelle Werthe von u

nicht verschwinde u. setzen wir zur Abkürzung:

$$1)\quad \Sigma(a_\lambda - b_\lambda) = c,$$

so ist:

$$\varphi_1(u+2\omega) = \varphi_1(u)\, e^{-2\eta c + 2g\omega}$$

$$\varphi_1(u+2\omega') = \varphi_1(u)\, e^{-2\eta' c + 2g\omega'}$$

u. es würde somit $\varphi_1(u)$ eine Function mit der reellen Periode 2ω sein, wenn $g = \frac{\eta c}{\omega}$ wäre. Wir können aber immer g in zwei Theile so zerlegen, dass $g = \frac{\eta c}{\omega} + g_0$ ist; setzen wir dann

$$2)\quad \varphi(u) = \frac{\sigma(u-a_1)\sigma(u-a_2)\dots\sigma(u-a_r)}{\sigma(u-b_1)\sigma(u-b_2)\dots\sigma(u-b_r)}\, e^{\frac{\eta c u}{\omega} + g'}$$

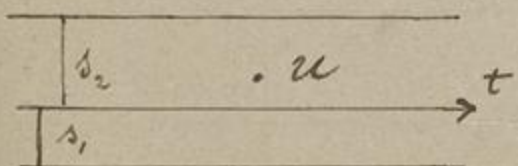
so haben wir:

$$\varphi_1(u) = \varphi(u)\cdot e^{g_0 u} \qquad \text{und:}$$

$$\varphi(u+2\omega) = \varphi(u)$$

$$3)\quad \varphi(u+2\omega') = \varphi(u)\, e^{\frac{\pi i c}{\omega}}$$

Mithin ist $\varphi(u)$ eine reell periodische Function von u mit der Periode 2ω, welche überdies noch die Eigenschaft hat, dass sie, wenn man ihr Argument um $2\omega'$ vermehrt, in sich selbst übergeht, multiplicirt mit einer Constanten. Ist $c=0$, so ist die Function $\varphi(u)$ eine doppeltperiodische. Wir nehmen jedoch an, dass c vollkommen willkürlich sei u. wollen $\varphi(u)$ in eine Fourier'sche Reihe entwickeln u. den Giltigkeitsbereich der Entwicklung festzustellen suchen.

Es sei überhaupt $\varphi(u)$ eine eindeutige reell periodische Function, definirt für alle complexen Werthe von u, deren imaginärer Theil zwischen 2 gegebenen Grenzen liegt. Ist also $u = t + si$, so soll $\varphi(u)$ definirt sein als eine eindeutige analytische Function für alle reellen Werthe von t u. alle Werthe von s zwischen zwei Grenzen $-s_1$ u. $+s_2$. Das Gebiet von u ist also ein Parallelstreifen, der begrenzt wird von zwei in der

Entfernung s_1 resp. s_2 zur reellen Achse parallel laufenden Linien. Liegt nun s zwischen diesen Grenzen u. t zwischen $+\omega$ u. $-\omega$, so ist betrachtet als Function von t die Fourier'sche Entwicklung:

$$\varphi(t+si) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} A_\nu \, e^{\frac{\nu t \pi i}{\omega}}$$

$$2\omega A_\nu = \int_{-\omega}^{+\omega} \varphi(t+si)\, e^{-\frac{\nu t \pi i}{\omega}}\, dt$$

Diese Entwicklung gilt aber auch für alle Werthe von t; denn an den beiden Grenzen $-\omega$ u. ω stellt die Entwicklung zum mindesten immer den Mittelwerth $\frac{1}{2}(\varphi(-\omega+si)+\varphi(+\omega-si))$ dar; dieser ist aber, da $\varphi(u)$ die reelle Periode 2ω hat gleich dem Werthe der Function in diesen Grenzen selbst; daraus folgt aber, dass die Reihe den Werth der Function für jeden reellen Werth von t gibt, wenn man nur die Coefficienten A_ν so bestimmt, dass die Reihe für das Intervall $-\omega .. +\omega$ richtig ist. Die Coefficienten A_ν werden nun Functionen von s sein; um dieselben zu berechnen, setzen wir:

$$2\omega A_\nu = e^{\frac{\nu si \cdot \pi i}{\omega}} \int_{-\omega}^{+\omega} e^{-\frac{\nu \pi i}{\omega}(t+si)}\, \varphi(t+si)\, dt$$

$$= e^{\frac{\nu si \cdot \pi i}{\omega}} \int_{-\omega}^{+\omega} \psi(t+si)\, dt$$

Die Function $\psi(t+si)$ ist ebenfalls reell periodisch mit der Periode 2ω u. besitzt für alle reellen Werthe von t denselben Character wie $\varphi(t+si)$, d.h. sie ist innerhalb des Parallelstreifens eine reguläre analytische Function, folglich ist, wenn wir setzen:

$$S = \int_{-\omega}^{+\omega} \psi(t+si)\, dt$$

$$\frac{dS}{ds} = i \int_{-\omega}^{+\omega} \psi'(t+si)\, dt = i\,\{\psi(\omega+si) - \psi(-\omega+si)\}$$

mithin, da $\psi(t+si)$ die reelle Periode 2ω hat:

$$\frac{dS}{ds} = 0 \qquad \text{oder} \qquad S = C_\nu$$

d. h. es ist S, so lange s in den angegebenen Grenzen liegt, unabhängig von s, also eine Constante, mithin ist:

$$2\omega A_\nu = C_\nu e^{\frac{\nu s i \cdot \pi i}{\omega}}$$

$$\varphi(t+si) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_\nu \frac{C_\nu}{2\omega} e^{\frac{\nu(t+si)}{\omega}\pi i}$$

Ist also $\varphi(u)$ eine reell periodische, innerhalb eines gewissen Parallelstreifens eindeutig definirte Analytische Function, so gilt die für reelle Werthe von u geltende Fourier'sche Entwicklung auch noch für alle innerhalb jenes Parallelstreifens gelegenen complexen Werthe von u.

Gehen wir jetzt zur Function $\varphi(u)$ zurück, so haben wir zunächst den Giltigkeitsbereich einer Fourier'schen Entwicklung festzustellen. Da $\varphi(u)$ für reelle Werthe von u nicht unendlich werden soll, so darf keines der b einer reellen Größe congruent sein. Man kann alsdann $\varphi(u)$ stets auf eine andre Function reduciren, in welcher der imaginäre Theil sämtlicher b zwischen 0 u. $2\omega'$ liegt, diese Grenzen aber ausgeschlossen. Man kann nämlich b_1 darstellen in der Form:

$$b_1 = 2\xi_1\omega + 2\xi_1'\omega'\ ;$$

bedeutet also ν_1' die größte in ξ_1' enthaltene ganze Zahl, so ist:

$$b_1 = 2\xi_1\omega + 2\nu_1'\omega' + 2\xi_1''\omega' \quad , \quad \text{wo}$$

$$0 < \xi_1'' < 1$$

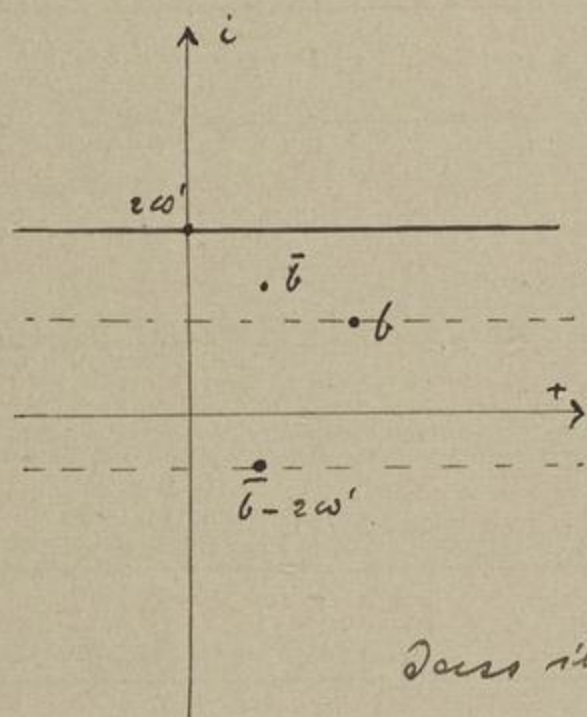
Setzen wir also:

$$b_1 = b_1' + 2\nu_1'\omega' ,$$

so ist b_1' eine Größe, deren imaginärer Theil zwischen 0 u. $2\omega'$ liegt. In ähnlicher Weise kann man auch $a_1 = a_1' + 2\nu_1'\omega'$ setzen, wo aber a_1' nicht der Bedingung unterliegt, dass ihr imaginärer Theil kleiner als $2\omega'$ sei. Indem wir diese Substitutionen in $\varphi(u)$ ein-

führen, erhalten wir:

$$\varphi(u) = \frac{\sigma(u-a_1')\sigma(u-a_2')\dots\sigma(u-a_r')}{\sigma(u-b_1')\sigma(u-b_2')\dots\sigma(u-b_r')} e^{\frac{\eta c u}{\omega}+g'+2\eta'\sum \nu_\lambda'(a_\lambda-b_\lambda)}$$

$$= \bar{\varphi}(u)$$

Es ist daher $\bar{\varphi}(u)$ eine Function von genau derselben analytischen Beschaffenheit wie $\varphi(u)$ u. unterscheidet sich von letzterer nur durch einen constanten Factor. Wir wollen demnach annehmen, dass in unsrer ursprünglichen Function $\varphi(u)$ die b bereits so beschaffen sind, dass ihr imaginärer Theil kleiner als $2\omega'$ ist. Dann wird es unter diesen ein b geben, es werde $\bar{b}$ genannt, welches der reellen Achse am nächsten liegt. Legen wir durch diesen Punkt $\bar{b}$ eine Parallele zur reellen Achse, so wird $\varphi(u)$ innerhalb dieses Parallelstreifens nirgends unendlich gross werden. Dasselbe gibt aber auch für den Parallelstreifen, welcher von der reellen Achse u. der durch den Punkt $\bar{b}-2\omega$ zu ihr gezogenen Parallelen begrenzt wird, wenn $\bar{b}$ dasjenige unter den b bedeutet, welches am weitesten von der reellen Achse entfernt liegt. Mithin kann nach den vorausgeschickten allgemeinen Bemerkungen unsre Function $\varphi(u)$ für alle complexen Werthe von u innerhalb des Parallelstreifens $(b \dots \bar{b}-2\omega')$ in eine Fourier'sche Reihe entwickelt werden. Die Bestimmung der Coefficienten dieser Entwicklung aber würde auf gewöhnlichem Wege wohl unausführbar sein, man kann indessen auf andre sehr elegante u. bequeme Weise zum Ziele gelangen. Dies geschieht dadurch, dass wir das Gebiet der Entwickelbarkeit der Function $\varphi(u)$ erweitern. Angenommen nämlich, es existire eine Function $\chi(u)$ mit der einen reellen Periode 2ω, welche nur an den Stellen $b_1 b_2 \dots b_r$ inner-

halb des Parallelstreifens $(0 \ldots\ldots + 2\omega')$ u. den in Bezug auf 2ω diesen congruenten Stellen unendlich wird u. zwar so, dass die Differenz $\varphi(u) - \chi(u)$ an diesen Stellen einen endlichen Werth besitzt, dann wird die Differenz $\varphi(u) - \chi(u)$, wenn man von der reellen Achse aus nach oben u. unten hin fortschreitet, zum ersten Male wieder unendlich werden an den Stellen $b + 2\omega'$ u. $\bar{b} - 2\omega'$ u. es wird sich daher die Differenz $\varphi(u) - \chi(u)$ innerhalb des Parallelstreifens $(\bar{b} - 2\omega' \ldots\ldots b + 2\omega')$ in eine Fourier'sche Reihe entwickeln lassen. Eine solche Function $\chi(u)$ existirt nun in der That u. ist leicht aufzustellen, wir wollen dabei jedoch die (unwesentliche, nicht beschränkende, aber zunächst bequemere) Voraussetzung machen, dass keine zwei der b einander congruent sind. Setzt man dann $u = b_\lambda + \kappa$, so ist nach Potenzen von κ entwickelt:

$$\varphi(b_\lambda + \kappa) = B_\lambda \kappa^{-1} + \mathfrak{P}(\kappa) \quad , \text{ worin:}$$

$$4) \quad B_\lambda = \frac{\sigma(b_\lambda - a_1) \ldots\ldots \sigma(b_\lambda - a_r)}{\sigma(b_\lambda - b_1) \ldots\ldots \sigma(b_\lambda - b_r)} e^{g'} \quad , \text{ ferner:}$$

$$\varphi(b_\lambda + 2\tilde{\omega} + \kappa) = B_\lambda e^{\frac{\nu'\pi i c}{\omega}} \kappa^{-1} + \bar{\mathfrak{P}}(\kappa) \quad , \quad \tilde{\omega} = \nu\omega + \nu'\omega'$$

Setzt man nun:

$$5) \quad \varphi_\lambda(u) = B_\lambda \frac{\pi}{2\omega} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2\omega}(u - b_\lambda)\right)$$

so ist:

$$\varphi_\lambda(u + 2\mu\omega) = \varphi_\lambda(u)$$

u. die Function φ_λ wird unendlich nur an der Stelle b_λ u. den in Bezug auf ω dieser congruenten Stellen. Da nun, wenn man an die Stelle von u $b_\lambda + \kappa$ setzt, ihre Entwicklung nach Potenzen von κ die folgende ist:

$$\varphi_\lambda(b_\lambda + \kappa) = B_\lambda \kappa^{-1} + \ldots$$

$$\varphi_\lambda(b_\lambda + 2\mu\omega + \kappa) = B_\lambda \kappa^{-1} + \ldots$$

so geht hieraus hervor, dass die Differenz $\varphi(u) - \varphi_\lambda(u)$ an den

162 Stellen $u = b_\lambda + 2\mu\omega$ nicht mehr unendlich groß wird. Setzt man also
$$\chi(u) = \sum_1^r \varphi_\lambda(u)$$
so wird die Differenz:
$$\varphi(u) - \sum_1^r \varphi_\lambda(u)$$
an den Stellen $b_1 b_2 \dots b_r$ u. den ihnen in Bezug auf ω congruenten nicht mehr unendlich groß werden. Es wird mithin diese Differenz innerhalb des Parallelstreifens $(\bar{b} - 2\omega' \dots b + 2\omega')$ nicht mehr unendlich groß u. kann daher für alle in ihm gelegenen Werthe von u in eine Fourier'sche Reihe entwickelt werden von der Form:
$$6) \quad \varphi(u) - \sum_1^r \varphi_\lambda(u) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A'_\nu\, e^{\frac{\nu\pi i u}{\omega}}$$
Beschränken wir jetzt u wieder auf den ursprünglichen Parallelstreifen $(\bar{b} - 2\omega' \dots b)$, so kann man in vorstehender Gleichung $2\omega' + u$ statt u setzen u. es wird:
$$\varphi(u+2\omega') - \sum_1^r \varphi_\lambda(u+2\omega') = \sum_{-\infty}^{+\infty} A'_\nu\, e^{\frac{\nu\pi i}{\omega}(u+2\omega')} \quad \text{oder:}$$
$$7) \quad e^{\frac{\pi i c}{\omega}} \varphi(u) - \sum_1^r \varphi_\lambda(u+2\omega') = \sum_{-\infty}^{+\infty} A'_\nu\, e^{\frac{\nu\pi i}{\omega}(u+2\omega')}$$
mithin aus (6) u. (7):
$$8) \quad \sum_1^r \varphi_\lambda(u+2\omega') - e^{\frac{\pi i c}{\omega}} \sum_1^r \varphi_\lambda(u) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A'_\nu \left(e^{\frac{\pi i c}{\omega}} - e^{\frac{2\nu\pi i\omega'}{\omega}}\right) e^{\frac{\nu\pi i u}{\omega}}$$
Diese Formel gilt für alle Werthe von u, welche innerhalb des ursprünglichen Parallelstreifens $(\bar{b} - 2\omega' \dots b)$ gelegen sind. Ist also:
$$9) \quad u = 2t\omega + 2t'\omega', \quad b = 2\beta\omega + 2\beta'\omega', \text{ so muß sein:}$$
$$0 < \beta' < 1, \quad t' - \beta' < 0 \quad ; \quad t' + 1 - \beta' > 0.$$
Setzen wir noch zur Abkürzung:
$$10) \quad e^{\frac{\pi i c}{\omega}} = l, \quad e^{\frac{\pi i \omega'}{\omega}} = h, \quad e^{\frac{u\pi i}{2\omega}} = z$$
so geht unsere Formel in folgende über:
$$11) \quad \sum_1^r \varphi_\lambda(u+2\omega') - l \sum_1^r \varphi_\lambda(u) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A'_\nu (l - h^{2\nu}) z^{2\nu}$$
Hierdurch werden nun die Coefficienten A'_ν ausgedrückt durch

die Coefficienten der Entwicklungen von bekannten Functionen. Nun ist:

$$\operatorname{ctg} x = i\,\frac{e^{+2xi}+1}{e^{+2xi}-1} = i - \frac{2i}{1-e^{2xi}} = i - 2i\sum_0^\infty e^{2nxi}$$

$$= -i + \frac{2i}{1-e^{-2xi}} = -i + 2i\sum_0^\infty e^{-2nxi}$$

Dabei gilt die erste oder zweite Entwicklung, je nachdem die zweite Coordinate von x positiv oder negativ ist. Nun ist aber in:

$$\varphi_\lambda(u) = B_\lambda \frac{\pi}{2\omega} \operatorname{ctg} \frac{(u-b_\lambda)\pi}{2\omega}$$

die zweite Coordinate von $\frac{(u-b_\lambda)\pi}{2\omega}$ negativ, da $t'-\beta_\lambda' < t-\beta' < 0$ ist; mithin ist dabei die 2te Art der Entwicklung anzuwenden. Dagegen ist in $\varphi_\lambda(u+2\omega')$ die zweite Coordinate positiv, da ja $t'+1-\beta_\lambda' > 0$ ist; für diese Function gilt daher die erste Art der Entwicklung. Folglich erhalten wir:

$$\varphi_\lambda(u) = -B_\lambda\frac{\pi i}{2\omega} + B_\lambda\frac{\pi i}{\omega}\sum_0^\infty{}_n\, e^{-\frac{n(u-b_\lambda)\pi i}{\omega}}$$

$$\varphi_\lambda(u+2\omega') = B_\lambda\frac{\pi i}{2\omega} - B_\lambda\frac{\pi i}{\omega}\sum_0^\infty{}_n\, e^{\frac{n(u+2\omega'-b_\lambda)\pi i}{\omega}}$$

oder, wenn wir z u. h einführen u. das Glied der Reihe für $n=0$ mit der Constanten vereinigen:

$$\text{12)}\qquad \begin{aligned} \varphi_\lambda(u) &= B_\lambda\frac{\pi i}{2\omega} + B_\lambda\frac{\pi i}{\omega}\sum_1^\infty{}_n\, e^{\frac{nb_\lambda\pi i}{\omega}} . z^{-2n} \\ \varphi_\lambda(u+2\omega') &= -B_\lambda\frac{\pi i}{2\omega} - B_\lambda\frac{\pi i}{\omega}\sum_1^\infty{}_n\, e^{-\frac{nb_\lambda\pi i}{\omega}} . h^{2n} z^{+2n} \end{aligned}$$

Setzen wir nun dies in unsre Formel (11) ein u. bedienen wir uns dabei der Abkürzungen:

$$\text{13)}\qquad \begin{aligned} C_0 &= \frac{\pi}{2\omega}\sum_1^r{}_\lambda\, B_\lambda \\ C_n &= \frac{\pi}{2\omega}\sum_1^r{}_\lambda\, B_\lambda\, e^{-\frac{nb_\lambda\pi i}{\omega}} \end{aligned}$$

so erhalten wir:

$$-(1+l)C_0 i - 2i\sum_1^\infty{}_n\, C_{+n} h^{2n} z^{2n} - 2li\sum_1^\infty{}_n\, C_{-n} z^{-2n} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_\nu\, A_\nu'(l-h^{2\nu}) z^{2\nu}$$

Setzen wir daher die Coefficienten beiderseits gleich, so wird:

$$A'_0(l-1) = -(1+l)C_0 i$$

$$A'_{+n}(l-h^{+2n}) = -2i\,C_n h^{2n}$$

$$A'_{-n}(l-h^{-2n}) = -2li\,C_{-n}$$ oder:

$$A'_{+n} = \frac{2ih^{2n}}{h^{2n}-l}C_n$$

14) $$A'_0 = \frac{1+l}{1-l}C_0 i \;;\qquad A'_{-n} = \frac{2il}{h^{-2n}-l}C_{-n}$$

Ist nun ferner:

$$\varphi(u) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n A_n z^{2n}$$

so ist wegen Formel (6):

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n A_n z^{2n} = iC_0 + 2i\sum_1^{\infty}{}_n C_{-n} z^{-2n} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n A'_n z^{2n}$$

u. daher:

$$A_0 = iC_0 + A'_0$$

$$A_{+n} = A'_{+n}$$

$$A_{-n} = 2iC_{-n} + A'_{-n}$$

u. daraus:

$$A_0 = \frac{2i}{1-l}C_0$$

15) $$A_{+n} = \frac{2ih^{2n}}{h^{2n}-l}C_{+n}$$

$$A_{-n} = \frac{2ih^{-2n}}{h^{-2n}-l}C_{-n}$$

Man kann daher für jeden beliebigen Werth von n diese drei Formeln in die eine zusammenfassen:

16) $$A_n = \frac{2ih^{2n}}{h^{2n}-l}C_n$$

u. es folgt schließlich für $\varphi(u)$ die Entwicklung:

17) $$\varphi(u) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \frac{2ih^{2n}C_n}{h^{2n}-l}\,l^{\frac{nu\pi i}{\omega}}$$

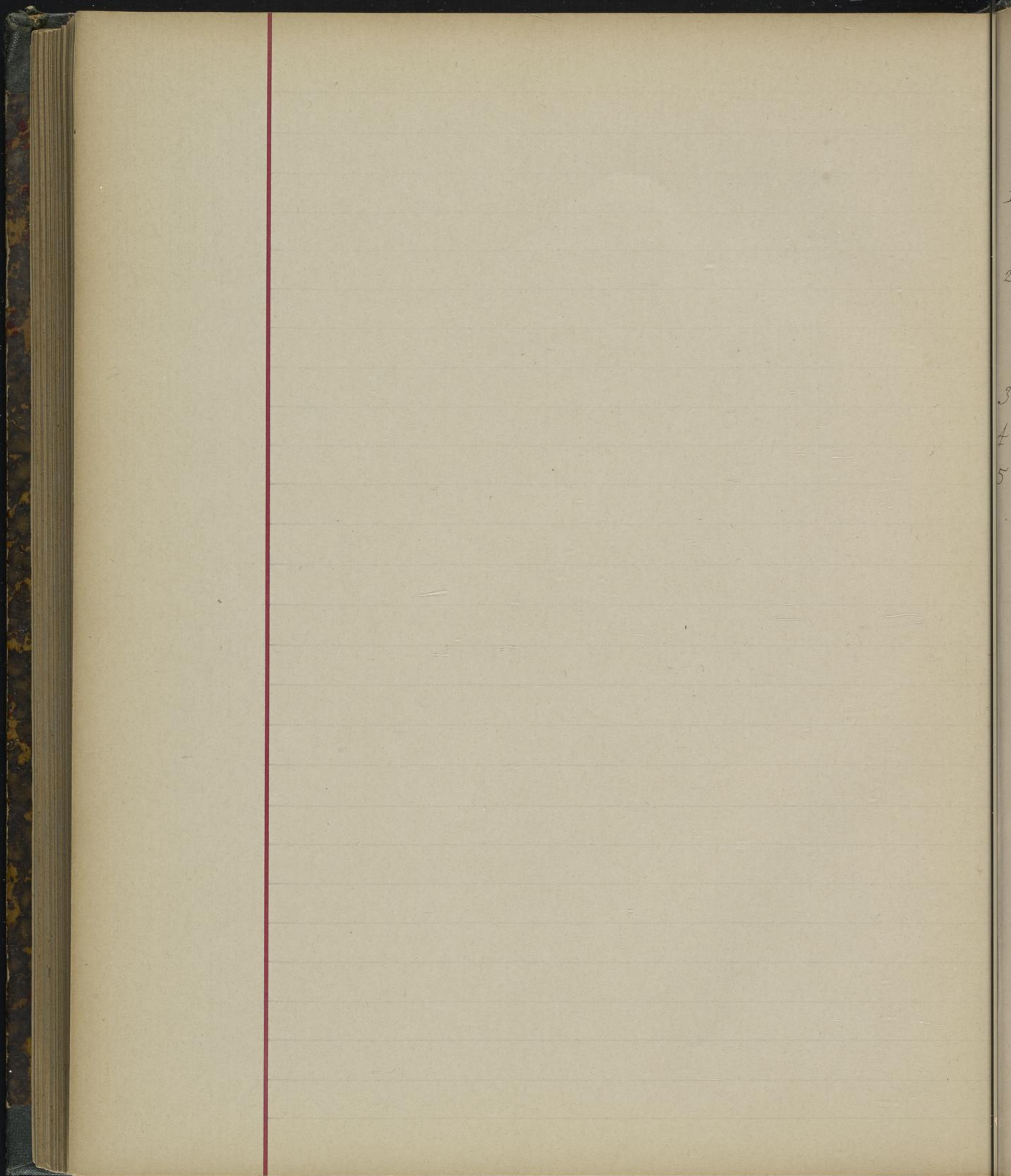
worin

$$C_n = \frac{\pi}{2\omega}\sum_1^r{}_\lambda B_\lambda\, l^{-\frac{nb_\lambda \pi i}{\omega}}$$

und

$$B_\lambda = \left[\varphi(b_\lambda + \kappa)\right]_{\kappa^{-1}}$$

ist.

Math. Seminar. 1

Nov. 3d 1880.

Zwecke des Seminars.

1. Die älteren Stud. können eigne Arbeit zum Vortrage bringen.
2. Man hat Gelegenheit bekannt zu werden mit der math. Literatur. Dazu eine reiche Sammlung der wichtigsten Werke & Journale.
3. Vorträge von den Prof. über besondern Gegenst.
4. Stud. können ihre Fragen in Anregung bringen.
5. Wird die Zahl der St. zu gross, werden sie in 2 (höheren & nied.) Abtheilungen getheilt.

Einiges aus der Mechanik des Himmels.

Wir nehmen ein System materieller Punkte, welche keinen anderen Gesetzen unterworfen sind, als der gegenseitigen Anziehung nach dem Newtonschen Gesetze. d.h. $-\frac{m m'}{r^2}$

Die allgemeine Aufgabe, die Coord. eines Punktes als F.ⁿ der Zeiten auszudrucken, ist nicht lösbar.

Die Data sind die Massen der Pte und deren Richtungen und Geschwindigkeiten in einem Momente, daraus
sucht man die Coord. für irgend eine andere Zeit. Allgemein ist dies nur für 2 Punkte gelöst worden. Einige Umstände aber begünstigen eine angenäherte Berechnung der Coord. in unserem Sonnensysteme, näml. die überwiegende Masse der Sonne, der nahezu kreisförmige Karakter der Bahnen, und deren geringe Neigung gegen einander. Ueber den bisher gelangten Grad der Annäherung aber sind die Ansichten verschieden, insbesondere irrt sich die Oeff. Meinung darüber den Astronomen zu Gunsten. Um die Stabilität des Sonnensystems zu begründen, müsste man

zeigen, dass die Schwankungen der Planeten gewissen Grenzen niemals überschreiten, d.h. dass die Planeten immer zwischen zwei festen Kugelschichten bleiben, welche die Sonne zum Mittelpkt. besitzen. Man kann zwar beweisen das die Coord. stetige Funct^n der Zeit sind, dass sie darnach entwickeln lassen nach dem Taylor. Lehrsatz in der Form $f(t-t_0) = \ldots$

wobei der Ausdruck auch dann eine Bedeutung besitzt wenn man dem t complexe Werte beilegt. Nach Fourier's Theorem lässt sich die Coord darstellen in eine Reihe (sin & cosinus) deren allgemeines Glied

$$\sum_{n=1,2\ldots} \cos\left(\frac{2n\pi}{\omega} t\right) A + B \cdot \sin\left(\frac{2n\pi}{\omega} t\right),$$

ist.

Die Converg. einer solch. Reihe ist gewöhnl. schwach und es bedarf dabei einer besond. Untersuchung wenn die Ableitungen auch converg. sollen. Wenn denn f' conv't, so muss f periodisch sein. Wenn man weiss dass die F nicht bloss für reele, sond. auch für einige complexe Werthe des t conv't, so dass

$$\varphi(t+\omega) = \varphi(t)$$

so conv't die Reihe stärker als eine geometrische R. Man verwandle die Reihe in Exponentg^n, z/B.

$$\varphi(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n\, e^{\frac{2n\pi i}{\omega} t}$$

$$\varphi(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \, e^{\frac{2n\pi i}{\omega} t}$$

wo c = compl. Gr. und c_{-n} conjug. ist mit c_{+n}
Man kann nachweisen dass φ eine Bedeutung hat auch für compl. Werthe von $t = u + vi$ so lange vi binnen gewiss. Grenzen bleibt.

$$\varphi(u+vi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n \, e^{\frac{-2n\pi v}{\omega}} \cdot e^{\frac{2n\pi i u}{\omega}}$$

$-s < vi < +s$.

+s

-s

Für $v = +\infty$ wird $e^{\frac{-2n\pi v}{\omega}} = \frac{1}{\infty} = 0$.

Allgem. Diffgl. der Störungsprobleme.

I Zwei Körper

mögen sich um ihren Schwpt bewegen, so ziehe man von einem festen Punkte aus einen Strecke // der Richtung des einen Körpers und dessen Geschw. proport. Dess freie End der Str. beschreibt immer eine geschl. Curve, und zwar in diesem Falle einen Kreis.

Die beschl. Kraft ist gl. negat. Masse div. d. Quad. der Entfernung d.h.

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial t^2} = -\frac{m_1(x_0 - x_1)}{r_{01}^3}$$

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} = -\frac{m_0(x_1 - x_0)}{r_{10}^3}.$$

Die Abscissa des Schwptes ist $\bar{x} = \frac{m_0 x_0 + m_1 x_1}{m_0 + m_1}$

wonach

$$\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = 0$$

d.h. der Schwerpt hat keine Beschleunigung.

$$\frac{d^2(x_1 - x_0)}{dt^2} = -\frac{(m_0 + m_1)(x_1 - x_0)}{r_{01}^3}$$

welches die relat. Bewegung angiebt. Setzt man $x_1 - x_0 = \xi$, so ist

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = -\frac{(m_0 + m_1)\xi}{r_{01}^3}$$

Um die Bew.$^{\text{ung}}$ des Schw.punkts zu erhalten,

$$x_1 - \bar{x} = x_1 - \frac{m_0 x_0 + m_1 x_1}{m_0 + m_1}$$

$$= \frac{m_0 (x_1 - x_0)}{m_0 + m_1}$$

und die Bewg. um den Schwerpunkt ist

$$\begin{cases} x_1 = \bar{x} + \dfrac{m_0 \xi}{m_0 + m_1} \\ \\ x_0 = \bar{x} + \dfrac{m_1 \xi}{m_0 + m_1} \end{cases}$$

da $x_1 - x_0 = \xi$.

$$\bar{x} = \frac{m_0 x_0 + m_1 x_1}{m_0 + m_1}$$

Schreibt man nun wieder x statt ξ, so hat man

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k^2 x}{r^3} \; ; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k^2 y}{r^3} \; ; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{k^2 y}{r^3} .$$

Es ist dann $y\dfrac{d^2z}{dt^2} - z\dfrac{d^2y}{dt^2} = 0$ & " " Man setze

$$\text{I} \quad \begin{cases} y\dfrac{d^2z}{dt^2} - z\dfrac{d^2y}{dt^2} = C_1 \\ \\ z\dfrac{d^2x}{dt^2} - x\dfrac{d^2z}{dt^2} = C_2 \\ \\ x\dfrac{d^2y}{dt^2} - y\dfrac{d^2x}{dt^2} = C_3 \end{cases}$$

wo die C's sich auf die [illegible] [illegible] [illegible] beziehen.

Nun ist $d\dfrac{x}{r} = \dfrac{r\,dx - x\,dr}{r^2} = \dfrac{r^2 dx - x(x\,dx + y\,dy + z\,dz)}{r^3}$

$$= \frac{y(y\,dx - x\,dy) + z(z\,dx - x\,dz)}{r^3}$$

Zur Wiederholung

16/11 '80

1 $\frac{d^2x}{dt^2} = -K^2 \frac{x}{r^3}$, $\frac{d^2y}{dt^2} = -K^2 \frac{y}{r^3}$ $\frac{d^2z}{dt^2} = -K^2 \frac{z}{r^3}$

2 $y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = c_1$ d. Combiniren & Integrieren $y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2} = 0$ add & sub. $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$

Price III 510 (6)

3 $c_1x + c_2y + c_3z = 0$ = Gl. einer Ebene d. den Opt.

4 $c_3\frac{dy}{dt} - c_2\frac{dz}{dt} = \frac{K^2x}{r} + h_1$ " "

5 $c_1h_1 + c_2h_2 + c_3h_3 = 0$

6 $K^2r = C = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} = -h_1x - h_2y - h_3z$

1 giebt die beschleunigende Kraft an,

2 die c_1 c_2 c_3 sind bekannte Constante, sobald Lage & Geschw. des Punkts f. 1 Augenblick gegeb. sind.

3 " die Bewegung geschieht in einer Ebene.

4

5 Abstand des bewegl. Pts vom festen ist proport. dem Abstand von einer Ebene

6 Bahn ist ein Keschnitt.

Price. 510. $xdy - ydx = p \cdot ds$ wo p = Perpend. vom Opt auf die Tang. an die Curve. Aus 2, $xdy - ydx = c_2 dt$, woraus
$\frac{ds}{dt}$ = veloc. $= \frac{c_2}{p}$. Aus $x = r\cos\theta$ $y = r\sin\theta$ hat man,
$xdy - ydx = r^2 d\theta = c_2 dt = p ds = 2\Delta$. Oder vielmehr #

Ans 4

$$c_1 \frac{dz}{dt} = c_3 \frac{dx}{dt} + \frac{k^2 y}{r} + h_1$$

$$c_2 \frac{dx}{dt} = c_1 \frac{dy}{dt} + \frac{k^2 z}{r} + h_2$$

$$c_3 \frac{dy}{dt} = c_2 \frac{dz}{dt} + \frac{k^2 x}{r} + h_3$$

C.

Weiestrass.

Vermischtes.